INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVI. BAND FÜNFTES HEFT 1958

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 20. Oktober 1958

Postverlagsort Berlin

Preis DM 10,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf — Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Rausch, W., Untersuchungen über die Luftwiderstände von körnigen und staubförmigen Gütern im Luftstrom. Mit 16 Abbildungen 319

Roth, W., Über eine zweckmäßige Walzenform für das Auswalzen dünner Folien. Mit 7 Abbildungen 333

Baldauf, H., Beitrag zur Theorie ebener Fachwerke. Mit 9 Abbildungen 338

Beck, H., Ein Beitrag zur Berechnung regelmäßig gegliederter Scheiben. Mit 10 Abbildungen 343

Szablewski, W., Turbulente Ausbreitung runder Heißluftstrahlen in bewegter Luft. (Erster Teil: Kernbereich.) Mit 22 Abbildnngen 358

Ziegler H., Kuppeln gleicher Festigkeit. Mit 4 Abbildungen 378

INGENIEUR-ARCHIV

XXVI. BAND FÜNFTES HEFT 1958

Untersuchungen über die Luftwiderstände von körnigen und staubförmigen Gütern im Luftstrom*

Von W. Rausch

1. Einleitung; Zweck und Ziel der Untersuchung. Für das Studium der Strömungsvorgänge von gasförmigen Medien mit Festteilchen, die heute auf vielen Gebieten der Technik, insbesondere in der Verfahrenstechnik, von großer Bedeutung sind, ist die Kenntnis des Luftwiderstandes der Festteilchen von größter Bedeutung.

Bei der Bewegung von Festteilchen in Gasen spielt neben der Masse der Teilchen vor allem der Luftwiderstand, der von der Strömung auf die Teilchen ausgeübt wird, eine entscheidende Rolle. Der Luftwiderstand der Teilchen ist von der Form, der Größe und der Zahl der Teilchen in einem bestimmten Raum sowie einer Reihe anderer Größen abhängig. Wenn man den Luftwiderstand der Teilchen und die Strömungsverhältnisse kennt, kann man die Bahnen der Teilchen mit Hilfe von Bewegungsgleichungen[1, 2, 3] errechnen. Die in der Literatur angegebenen Bewegungsgleichungen sind jedoch nur beschränkt anwendbar und gelten nur unter der Voraussetzung, daß die Gutbeladung so gering ist, daß die Strömungsverhältnisse durch die Festteilchen nicht beeinflußt werden.

Bei derartigen Untersuchungen wurde also bisher in der Regel angenommen, daß die einzelnen Teilchen sich gegenseitig nicht beeinflussen. Diese Annahme trifft in den meisten Fällen nicht zu. Es ist eine altbekannte Tatsache, die schon von vielen Forschern beobachtet worden ist, daß ein Gemisch aus vielen Teilchen in einem ruhenden Gas schneller nach unten fällt als ein einzelnes Teilchen. Weiter ist zu beachten, daß in der Praxis die Gemische meistens aus Teilchen verschiedener Größe und unregelmäßiger Form bestehen. Man kann daher die Beziehungen zur Berechnung des Luftwiderstandes von Einzelkörpern nicht ohne weiteres auf Gemische übertragen und muß versuchen, die Theorie des Widerstandes eines Gemisches den hier vorliegenden Verhältnissen anzupassen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich daher mit der theoretischen und der experimentellen Bestimmung des Luftwiderstandes von körnigen und staubförmigen Gütern im Luftstrom. Da der Luftwiderstand von körnigen und staubförmigen Gütern mit zunehmender Feinheit immer größer wird, kann von dem Luftwiderstand auch auf die Feinheit des Gutes und umgekehrt von der Feinheit des Gutes auch auf den Luftwiderstand geschlossen werden. Die Bestimmung des Luftwiderstandes ist daher gleichbedeutend mit einer Feinheitsbestimmung.

2. Theorie des Luftwiderstandes von körnigen und staubförmigen Gütern. a) Das Einzelteilchen. Die Luftwiderstände von einzelnen einfachen Körpern, z. B. der Kugel, der Kreisplatte, sind bereits seit langer Zeit Gegenstand weitgehender experimenteller und rechnerischer Untersuchungen gewesen[4, 5]. Dabei kann diese Aufgabe für die Kugel als gelöst betrachtet werden und es ist heute möglich, z. B. den Widerstand einer Kugel in irgendeinem strömenden Medium mit unbedingter Zuverlässigkeit zu berechnen. Dies gilt auch für ganz kleine Kugeln von der Größenordnung der Teilchen eines Staub–Luft-Gemisches.

Die Berechnung des Luftwiderstandes W von Einzelkörpern erfolgt nach der Beziehung

$$W = \alpha \frac{\gamma_L}{2g} F w^2 . \tag{1}$$

---

* Gekürzte Fassung der gleichnamigen von der Fakultät für Maschinenwesen genehmigten Dissertation des Verfassers, Technische Hochschule Karlsruhe, 1957.

[1] *W. Barth*, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950) S. 255.

[2] *W. Barth*, Ing.-Arch. 16 (1948) S. 147.

[3] *G. Weidner*, Grundsätzliche Untersuchungen über den pneumatischen Fördervorgang, insbesondere über die Verhältnisse bei Beschleunigung und Umlenkung. Diss. Karlsruhe 1954 und Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 21 (1955) S. 145.

[4] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömungslehre, S. 177. Braunschweig 1949.

[5] *E. Eiffel*, Recherches expérimentales sur la résistence de l'air exécutées – la Tour Eiffel, S. 78, Paris 1907.

Hierbei bedeuten F die Stirnfläche des Körpers in Anströmrichtung, w die mittlere Anströmgeschwindigkeit, γ_L das spezifische Gewicht des strömenden Mediums und α einen Widerstandsbeiwert, der von der *Reynolds*schen Kennzahl

$$Re = \frac{d_k w}{\nu}$$

abhängt; d_k ist eine charakteristische Körperlänge, ν die kinematische Zähigkeit des strömenden Mediums, g die Erdbeschleunigung.

Für die Kugel ist in Abb. 1 die Größe α als Funktion der *Reynolds*schen Kennzahl Re dargestellt. Bei *Reynolds*schen Zahlen $Re < 1$ ist α umgekehrt proportional zu Re. Das bedeutet, daß nur die Zähigkeitskräfte des umströmenden Mediums den Widerstand bedingen. Bei $Re > 2000$ wird der Wert α nahezu konstant. In diesem Fall bestimmen ausschließlich die Trägheitskräfte den Luftwiderstand des Körpers. Dazwischen liegt ein Übergangsgebiet, in dem beide Einflüsse wirksam sind. Alle übrigen Körper zeigen grundsätzlich ein ähnliches Verhalten, wenngleich sich die absoluten Werte erheblich unterscheiden können.

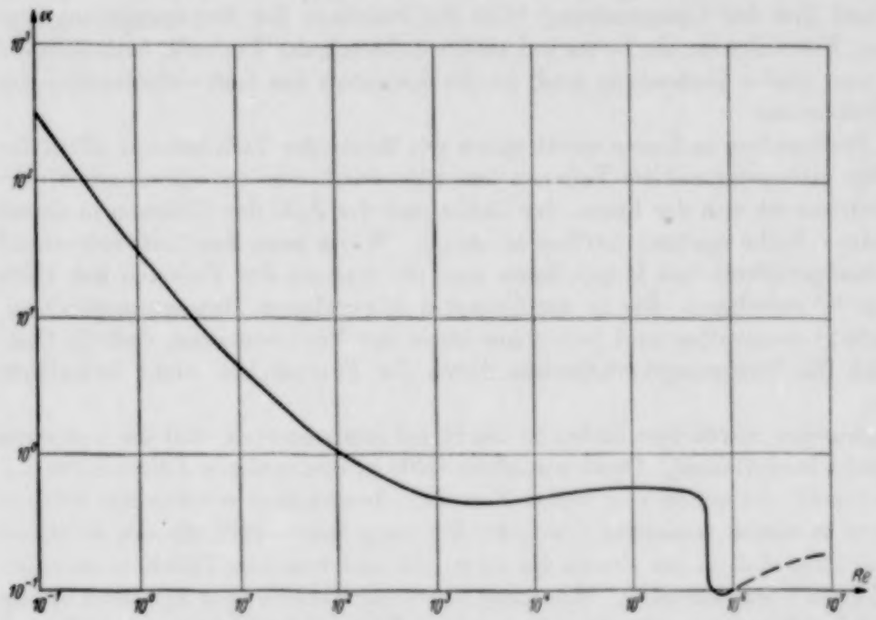

Abb. 1. Abhängigkeit des Kugelwiderstandsbeiwertes α von der *Reynolds*schen Zahl Re.

b) Das Gemisch. Im Gegensatz zu der großen Zahl der Untersuchungen über den Luftwiderstand von Einzelkörpern fehlen bis heute fast völlig Unterlagen über den Widerstand von Gemischen von Feststoffen in Gasen und Flüssigkeiten. Zum Aufbau einer Theorie des Luftwiderstandes von Gemischen müssen daher zunächst einige grundlegende Betrachtungen angestellt werden.

Man wird dabei zweckmäßigerweise so vorgehen, daß man versucht, die gleichen Überlegungen wie sie für die Einzelkugel gemacht wurden, sinngemäß auf ein Gemisch zu übertragen. Die Form der angegebenen Beziehung (1) dürfte jedoch für die Bestimmung des Luftwiderstandes von Gutgemischen nicht geeignet sein. Das Gemisch besteht im allgemeinen aus kleinen Körperchen, deren Gestalt nicht genau angegeben werden kann. Es ist daher nicht möglich, den Luftwiderstand wie beim Einzelkörper auf die Stirnfläche zu beziehen, ganz abgesehen davon, daß jedes Einzelteilchen eine andere Stirnfläche besitzt. Daher scheint es zweckmäßig zu sein, bei einem Korngemisch den Luftwiderstand nicht auf eine geometrische Größe zu beziehen. Im Gegensatz zur Stirnfläche ist das Gewicht des Gemisches in der Regel bekannt oder kann leicht bestimmt werden. Das Problem vereinfacht sich dann auf die Bestimmung einer Größe n, die wie folgt definiert ist:

$$n = \frac{W}{Q} = \frac{\text{Luftwiderstand}}{\text{Gutgewicht}}. \tag{2}$$

Der Wert n ist eine dimensionslose Zahl, die angibt, wievielmal größer der Luftwiderstand W des Gemisches als das Gewicht Q des Gemisches ist. Beim freien Fall im ruhenden Gas wird $n = 1$.

Nachstehend soll nun versucht werden die Beziehung (1) so umzuformen, daß sie auch auf Gemische angewendet werden kann. Es werde die Annahme gemacht, daß das Gutgemisch aus Kugeln vom Durchmesser d_k und vom spezifischen Gewicht γ_k bestehe, und daß sich die Teilchen gegenseitig nicht beeinflussen mögen. Der Gesamtwiderstand des Gemisches ist damit gleich der Summe der Luftwiderstände der einzelnen Teilchen. Beachtet man, daß das Gewicht Q einer Kugel

$$Q = \gamma_k \frac{\pi d_k^3}{6}$$

ist, dann ergibt sich aus (1) und (2) folgender Ausdruck:

$$n = \frac{3}{4}\frac{\gamma_L}{\gamma_k}\alpha\frac{w^2}{d_k\, g}. \tag{3}$$

Diese Gleichung wurde ausgewertet und in Abb. 2 über der Abszisse $n\,\gamma_k/\gamma_0$ dann die relative Anströmgeschwindigkeit w mit dem Kugeldurchmesser d_k als Parameter aufgetragen, wobei γ_0 das spezifische Gewicht des Wassers von 1000 kg/m³ bei 4° C ist. Der Mittelwert der Anströmgeschwindigkeit w aller Teilchen des Gemisches errechnet sich aus der Differenz der Luftgeschwindigkeit v und der Gutgeschwindigkeit c zu

$$w = v - c.$$

Das Diagramm Abb. 2 gilt nur für Luft von 20° C und 760 mm Hg. Um dieses Diagramm auch bei anderen Betriebszuständen anwenden zu können, wird die Gleichung (3) wie folgt umgeformt. Man setzt

$$d_k = \frac{\nu\, Re}{w} \tag{4}$$

und

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho} = g\,\frac{\eta}{\gamma_L}. \tag{5}$$

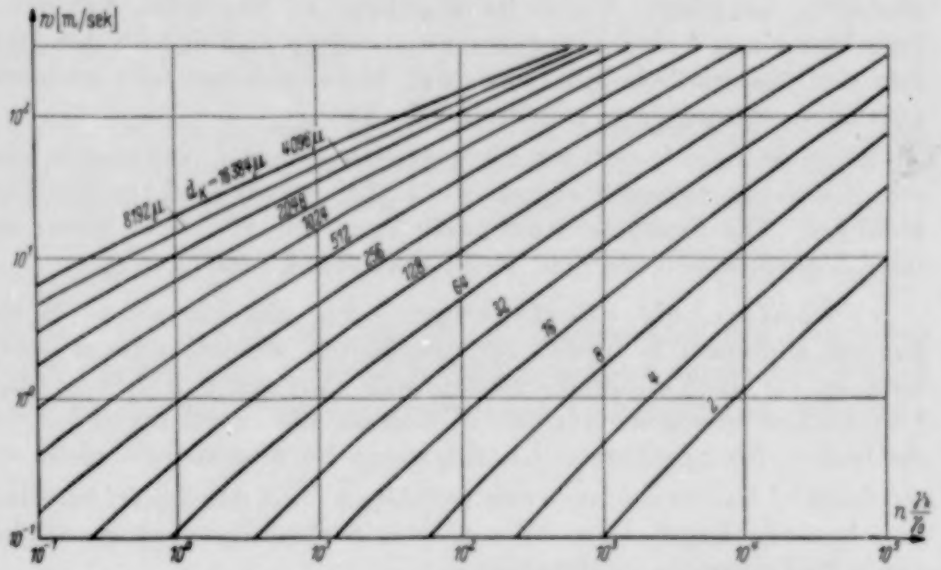

Abb. 2. Zusammenhang zwischen Luftwiderstand, Anströmgeschwindigkeit und Durchmesser kugeliger Teilchen.

Hierbei bedeuten η die absolute Zähigkeit des Fördermediums und ϱ die Dichte des Fördermediums. Die Beziehungen (4) und (5) ergeben

$$d_k = \frac{\eta\, g\, Re}{w\,\gamma_L}. \tag{6}$$

Erweitert man nun (3) auf beiden Seiten mit $\frac{\gamma_k\,\gamma_L}{\gamma_0\,\eta^2}$ und ersetzt d_k nach Beziehung (6), dann ergibt sich

$$n\,\frac{\gamma_k\,\gamma_L}{\gamma_0\,\eta^2} = \frac{3}{4\,g^2\,\gamma_0}\left(\frac{w\,\gamma_L}{\eta}\right)^3\frac{\alpha}{\left(\frac{w\,\gamma_L}{\eta}\right)\frac{d_k}{g}}. \tag{7}$$

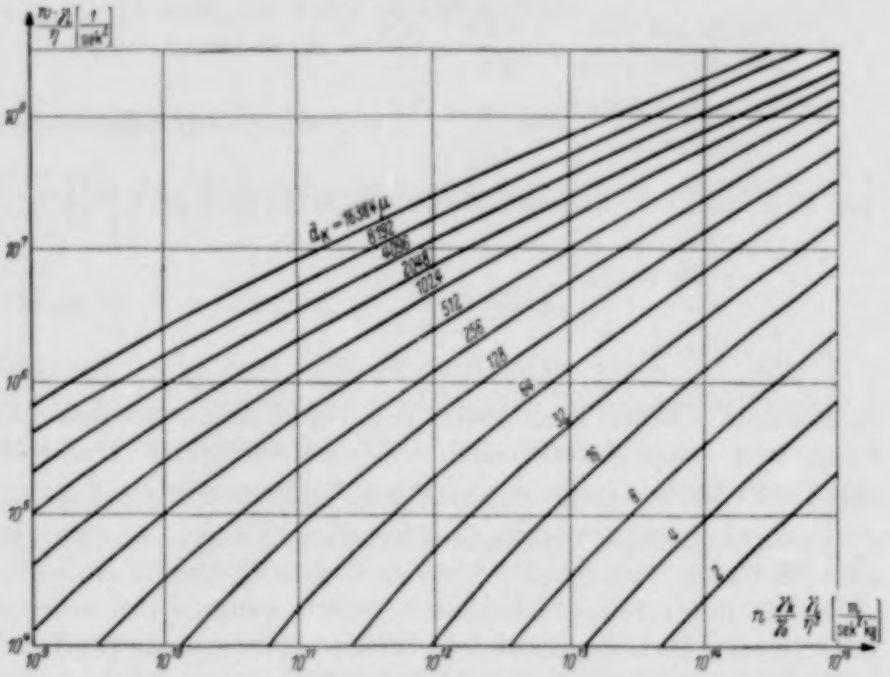

Abb. 3. Zusammenhang zwischen Luftwiderstand, Anströmgeschwindigkeit und Durchmesser kugeliger Teilchen.

In (7) kann $\left(n\,\frac{\gamma_k\,\gamma_L}{\gamma_0\,\eta^2}\right)$ als die abhängige und $\left(w\,\frac{\gamma_L}{\eta}\right)$ als die unabhängige Veränderliche angesehen werden. Durch Auswerten der Beziehung (7) und Auftragen von $\left(n\,\frac{\gamma_k\,\gamma_L}{\gamma_0\,\eta^2}\right)$ als Abszisse sowie $\left(w\,\frac{\gamma_L}{\eta}\right)$ als Ordinate entsteht Abb. 3. Parameter der Kurvenschar ist wieder der Kugeldurchmesser d_k. Dieses Diagramm ist für alle Medien anwendbar unter der Voraussetzung, daß das spezifische Gewicht des gasförmigen oder flüssigen Mediums klein gegenüber dem spezifischen Gewicht des Materials ist. Für den Fall, daß die spezifischen Gewichte γ_k und γ_L von der gleichen Größenordnung sind, bleibt das Diagramm das gleiche, nur hat die Einheit der Abszisse dann den Wert

$$n\,\frac{(\gamma_k - \gamma_L)}{\gamma_0}\,\frac{\gamma_L}{\eta^2}.$$

Diese Darstellung eignet sich vor allem dazu, eine Verbindung des Luftwiderstandes eines Einzelkörpers mit dem Luftwiderstand eines Gemisches herzustellen. Sind die Werte n und w

für ein Gemisch beispielsweise durch den Versuch bestimmt, so kann mit Hilfe der Abb. 2 oder Abb. 3 der Durchmesser einer Kugel eines Kugelgemisches angegeben werden, das unter der Voraussetzung, daß sich die Kugeln gegenseitig nicht beeinflussen, den gleichen Widerstand wie das Gemisch haben würde. Dieser Durchmesser möge als gleichwertiger Kugeldurchmesser d_k des Gemisches definiert werden. Durch Angabe des gleichwertigen Kugeldurchmessers, des spezifischen Gewichtes des Materials, des spezifischen Gewichtes und der Zähigkeit des Fördermediums, der Gasgeschwindigkeit und der Gutgeschwindigkeit ist somit der Widerstand des Gutgemisches eindeutig festgelegt. Dabei ist allerdings zu beachten, daß der gleichwertige Kugeldurchmesser im allgemeinen keine Konstante ist, sondern daß er von den Betriebsverhältnissen, insbesondere von der Materialbeladung bzw. der Materialdichte und anderen Größen wie Kornform, Kornzusammensetzung usw. abhängig sein kann.

Statt des gleichwertigen Kugeldurchmessers d_k kann es in manchen Fällen auch zweckmäßig sein die dazugehörige Sinkgeschwindigkeit w_f als Maß für den Luftwiderstand des Gemisches einzuführen. Die Sinkgeschwindigkeit kann aus (3) leicht errechnet werden, bzw. aus den Abb. 2 oder 3 entnommen werden, wenn man $n = 1$ setzt.

c) Ähnlichkeitsüberlegungen. Für ein homogenes Medium sind die Ähnlichkeitsbedingungen allgemein bekannt, die eingehalten werden müssen, sobald man von einem Strömungsvorgang auf einen anderen schließen will. Auf den Fall jedoch, daß sich in dem strömenden Medium Festteilchen bewegen oder daß es sich um die Strömungen von Mehrstoffgemischen handelt, sind die bisher durchgeführten Überlegungen im allgemeinen nicht anwendbar.

Barth[1, 2] hat versucht, auch für diesen Fall Ähnlichkeitsbedingungen aufzustellen und kommt zu folgenden Ergebnissen: Wenn zwei Strömungsvorgänge ähnlich verlaufen sollen, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Geometrische Ähnlichkeit zwischen Modell und Großausführung,

2. $$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}} \sim \frac{v\,d\,\gamma}{g\,\eta} = \frac{v\,d}{\nu} = Re = \text{konst.},$$

3. $$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Schwerkräfte}} \sim \frac{v}{\sqrt{d\,g}} = Fr = \text{konst.}\ (\textit{Froude}\text{sche Kennzahl}).$$

Bei Mehrstoffgemischströmungen ist außerdem noch den weiteren Forderungen

4. $\dfrac{\gamma}{\gamma_*} = \text{konst.},$

5. $\dfrac{\eta}{\eta_*} = \text{konst.}$

zu genügen. Neben den bereits bekannten Bezeichnungen bedeutet hier d eine charakteristische Länge und v eine charakteristische Geschwindigkeit. Durch einen Stern als Index soll eine zweite charakteristische Größe des gleichen Strömungsfeldes gekennzeichnet werden.

Die gleichzeitige Erfüllung aller dieser Gesetze für eine Mehrstoffgemischströmung ist in den meisten Fällen unmöglich[1]. Man muß deshalb häufig einen Ausweg in der Weise suchen, daß man an Stelle der strengen Ähnlichkeitsbedingungen Ersatzbedingungen verwendet. Diese Ersatzbedingungen verzichten auf die Einhaltung der geometrischen Ähnlichkeit hinsichtlich der Teilchen im Strömungsfeld. Dagegen muß die Bedingung erfüllt sein, daß die auf die Teilchen wirkenden Kräfte im gleichen Verhältnis zu den übrigen Kräften in der Strömung stehen.

In einer eindimensionalen Strömung gilt für ein Teilchen mit der Masse m

$$W - Q = m\,\frac{dc}{dt}.$$

Drückt man hierin W durch (1), sowie Q durch die Fallgeschwindigkeit nach Abschnitt b) aus, und legt man dem Widerstandsbeiwert α die Gesetzmäßigkeit

$$\alpha = \frac{\text{konst.}}{Re^x} = \frac{\text{konst.}}{\left[\dfrac{(v-c)}{\nu}\,d_k\right]^x}$$

[1] *W. Barth*, ZVDI, 92 (1950) S. 105.
[2] *W. Barth*, Chemie-Ingenieur-Technik, 26 (1954) S. 29.

zugrunde, so erhält man die Bewegungsdifferentialgleichung

$$g\,(v-c)^{2-\varkappa} - g\,w_f^{2-\varkappa} = \frac{dc}{dt}\,w_f^{2-\varkappa}\,. \tag{9}$$

Hieraus lassen sich die folgenden Ähnlichkeitsbedingungen ableiten:

$$\frac{w_f^{2-\varkappa}\,v^{\varkappa}}{d\,g} = \text{konst.}\,, \tag{10}$$

$$\left(\frac{w_f}{v}\right)^{2-\varkappa} = \text{konst.} \tag{11}$$

Die Bedingungen (10) und (11) gelten für ein Einzelteilchen. Für ein Gemisch tritt als weitere Bedingung hinzu, daß die Materialbeladung μ, d. i. das Verhältnis des geförderten Gutgewichts je Zeiteinheit G zum geförderten Luftgewicht je Zeiteinheit $V\gamma_L$, konstant bleibt, also

$$\mu = \frac{G}{V\gamma_L} = \text{konst.} \tag{12}$$

Der gleichwertige Korndurchmesser d_k, der als Maß für den Luftwiderstand des Gemisches aufgefaßt werden kann, muß daher als Funktion dieser Ähnlichkeitsgrößen dargestellt werden können. Um dimensionslose Werte zu erhalten, wird man daher das Verhältnis d_k/d einführen. Es muß sein

$$\frac{d_k}{d} = \Phi\left[\mu;\,\frac{w_f^{2-\varkappa}\,v^{\varkappa}}{d\,g}\,;\,\frac{w_f^{2-\varkappa}}{v}\right]. \tag{13}$$

Wenn der Luftwiderstand eines Gemisches bei einem Betriebszustand bekannt ist, können mit Hilfe der oben angegebenen Beziehungen für eine Reihe anderer Betriebszustände die Luftwiderstände angegeben werden. Es sind zwei ausgezeichnete Fälle zu unterscheiden:

I) $\varkappa = 1$. Hier wird

$$\frac{w_f\,v}{d\,g} = \text{konst.}\,, \qquad \frac{w_f}{v} = \text{konst.}\,, \qquad \mu = \text{konst.}\,, \qquad \frac{d_k}{d} = \Phi\left[\mu;\,\frac{w_f\,v}{d\,g}\,;\,\frac{w_f}{v}\right].$$

Diese Bedingungen gelten für den Fall, daß das *Stokes*sche Widerstandsgesetz anwendbar ist.

II) $\varkappa = 0$. Hier wird

$$\frac{w_f^2}{d\,g} = \text{konst.}\,, \qquad \frac{w_f^2}{v^2} = \text{konst.}\,, \qquad \mu = \text{konst.}\,, \qquad \frac{d_k}{d} = \Phi\left[\mu;\,\frac{w_f^2}{d\,g}\,;\,\frac{w_f}{v}\right].$$

Diese Bedingungen gelten für den Fall, daß das quadratische Widerstandsgesetz erfüllt ist.

Für die beiden Fälle gilt auch v^2/gd = konst., wie aus den Gleichungen leicht abgeleitet werden kann, und dies ist nichts anderes als die *Froude*sche Kennzahl.

3. Die Bestimmung des Luftwiderstandes von körnigen und staubförmigen Gütern. Eine rein rechnerische Ermittlung des Luftwiderstandes von Gemischen ist im allgemeinen genau so wenig möglich, wie es bei Einzelkörpern der Fall ist. Erst wenn für das Gemisch eine geeignete Darstellung des Luftwiderstandes vorhanden ist, können über die Ähnlichkeitsbeziehungen hinweg Aussagen für einen gegebenen Betriebszustand gemacht werden. Es kann daher nur eine experimentelle Ermittlung des Luftwiderstandes in Frage kommen. Zu seiner Bestimmung können folgende Verfahren Verwendung finden.

a) Windsichtung[1, 2] und Sedimentation[3]. Von *H. W. Gonell* wurde ein Gerät beschrieben, das zur Widerstands- und Feinheitsbestimmung von Gemischen Verwendung finden kann. Mit diesem Gerät kann die Sinkgeschwindigkeit der einzelnen Gutteilchen des Gemisches in einem strömenden Medium bestimmt und die Zusammensetzung des Gemisches hinsichtlich der Sinkgeschwindigkeit der einzelnen Gutteilchen ermittelt werden. In Abb. 4 ist ein Gerät dargestellt, das nach diesem Prinzip arbeitet.

Die Sichtung des untersuchten Gutes erfolgt dadurch, daß unter den konischen Ansaugstutzen eine mit Gut gefüllte Schale gehalten wird. Die Ansaugluft reißt alle Teilchen mit sich, deren

---

[1] *W. Barth*, Fette und Seifen 55 (1953) S. 617.

[2] VDI-Richtlinien, Leistungsversuche an Entstaubern, 2. Ausgabe 1949. Deutscher Ingenieur-Verlag GmbH. Düsseldorf.

[3] *H. W. Gonell*, ZVDI 27 (1928) S. 945.

Gewicht bei der eingestellten Luftgeschwindigkeit kleiner als ihr Luftwiderstand ist. Alle übrigen Teilchen bleiben in der Schale oder fallen in sie zurück. Für jede eingestellte Luftgeschwindigkeit wird der Gutrückstand in der Schale gemessen. Aus der Luftgeschwindigkeit kann auf den Luftwiderstand bzw. die Korngröße geschlossen werden.

Bei sehr feinkörnigem Gut treten bei der Windsichtung Schwierigkeiten auf. Die Luftgeschwindigkeiten werden sehr klein und damit schwerer meßbar. Ein Festhaften der untersuchten Körner an der Wand des Rohres und Zusammenbacken des Gutes verfälschen oft das Ergebnis. In manchen Fällen verwendet man deshalb zweckmäßigerweise statt der Windsichtung die Sedimentation. Am besten hat sich die Methode nach *Andreasen*[1] bewährt. Das Gerät nach *Andreasen* zeigt Abb. 5.

Mit Hilfe dieser beiden Verfahren können nur Aussagen über den Luftwiderstand bei einer Anströmgeschwindigkeit, d. h. bei der Sinkgeschwindigkeit ($n = 1$) gemacht werden. Es besteht keine Möglichkeit die Zusammenhänge zwischen Luftwiderstand, Materialbeladung und Anströmgeschwindigkeit aufzuzeigen. Gerade diese Zusammenhänge sind aber für den Ablauf von Strömungsvorgängen bei Gasen und Festteilchen von grundlegender Bedeutung.

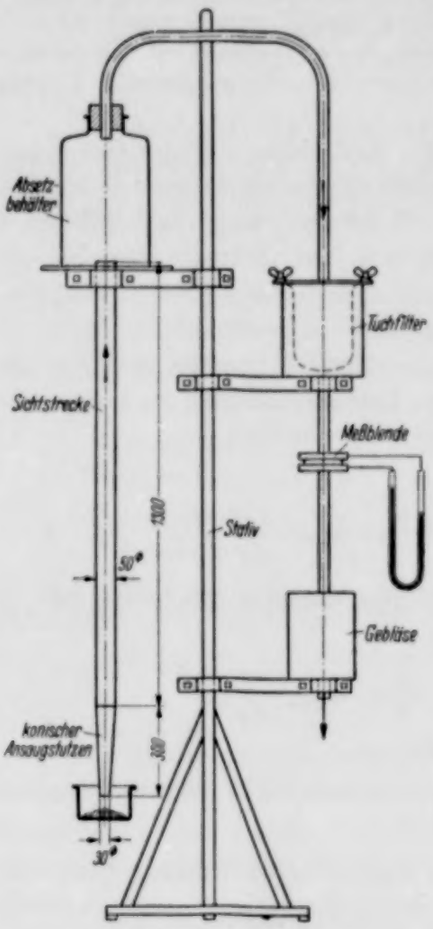

Abb. 4. Windsichtapparat.

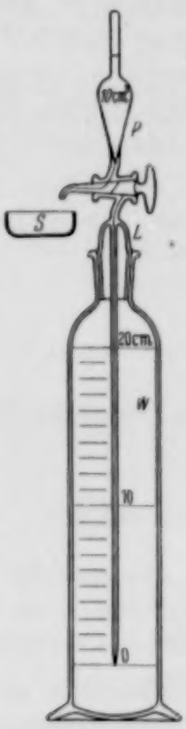

Abb. 5. Apparat nach *Andreasen*.

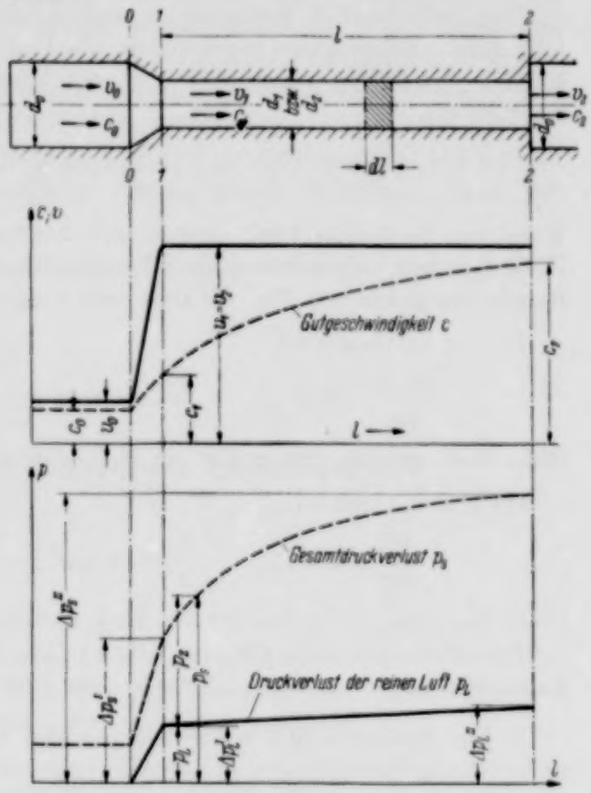

Abb. 6. Geschwindigkeits- und Druckverlauf in der Meßdüse.

b) Verfahren nach *Barth*. Die beschriebenen Nachteile der Sedimentation und der Windsichtung werden ausgeschaltet in einem Verfahren nach *Barth*[2]. Hier wird der Luftwiderstand des Gutes im freien Luftstrom gemessen. Damit können beliebige Anströmverhältnisse erreicht werden, und außerdem kann der Einfluß der Materialdichte leicht studiert werden. Wegen seiner Bedeutsamkeit für die gestellte Aufgabe soll dieses Verfahren eingehender betrachtet und die auf diese Weise gewonnenen Meßwerte den Untersuchungen zugrunde gelegt werden.

1. Beschreibung des Verfahrens. Die Grundlagen des Verfahrens sollen an Hand von Abb. 6 studiert werden. In eine Rohrleitung vom Durchmesser d_0 wird eine Meßdüse eingebaut, die aus einer zylindrischen Bohrung vom Durchmesser d_1 bzw. d_2 und einer gewissen Länge l mit einem konischen Übergangsstück am vorderen Rohrende (in Strömungsrichtung gesehen) besteht.

Durch die Rohrleitung möge ein Staub–Luft-Gemisch gesaugt und die statischen Drücke an den Maßebenen 0—0, 1—1 und 2—2 bestimmt werden. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß alle Teilchen des Gemisches die gleiche Größe haben. Hinter der Meßdüse wird man normaler-

[1] Siehe Fußnote 1 auf S. 323.
[2] Siehe Fußnote 2 von Seite 319.

weise zunächst ein Filter und anschließend eine Meßblende anordnen, um die durchgehenden Luft- und Gutmengen bestimmen zu können. In der Düse selbst stellt sich grundsätzlich ein Geschwindigkeits- und Druckverlauf ein, wie er in Abb. 6 aufgezeichnet ist.

Betrachten wir ein Teilchen beim Durchlaufen des Rohres und der anschließenden Düse nach Abb. 6. Vor Eintritt in die Düse mögen Luftgeschwindigkeit v_0 und Teilchengeschwindigkeit c_0 annähernd gleich groß sein. Beim Eintritt in die Düse steigt die Luftgeschwindigkeit sehr schnell auf den Wert v_1 an, während das Teilchen infolge seiner Trägheit zunächst seine Geschwindigkeit beizubehalten sucht. Dabei entsteht eine hohe Relativgeschwindigkeit $w = v - c$, die eine starke Beschleunigung bewirkt. Eine quantitative Betrachtung zeigt, daß in diesem Falle der Einfluß des Gewichtes und der Wandreibung vernachlässigbar klein sind. Erst allmählich beim Durchlaufen der Bohrung erhöht sich die Teilchengeschwindigkeit auf c_2. Die relative Anströmgeschwindigkeit, und damit auch die Beschleunigung, wird kleiner, so daß der Einfluß von Gewicht und Wandreibung immer mehr an Bedeutung gewinnt. Bei genügend langer zylindrischer Düsenlänge l stellt sich ein Beharrungszustand so ein, daß $w = v - c = \text{konst.}$ wird und der Luftwiderstand nur noch von Gewichtseinflüssen und Wandreibungsverlusten verursacht wird.

Zur Beschleunigung des Gutes muß auf die Rohrlänge dl ein bestimmtes, zusätzliches Druckgefälle dp_z der Luft aufgewendet werden. Bezeichnet man den Querschnitt des zylindrischen Düsenteils mit f, und macht man die Annahme, daß die von den Teilchen auf die Wand ausgeübten Reibungskräfte und das Gutgewicht vernachlässigbar klein sind, so ergibt die Anwendung des Impulssatzes

$$dW = dm \frac{dc}{dt} = dp_z f , \tag{14}$$

$$dm \frac{dc}{dt} = dm \frac{dc}{dl} c = dp_z f .$$

Nun ist aber

$$dm = \frac{G}{c} \frac{dl}{g} ,$$

und damit wird

$$dp_z f = \frac{G}{g} dc .$$

Führt man die Materialbeladung μ ein und integriert, so ergibt sich

$$\Delta p_z \Big|_{l_1}^{l_2} = \frac{\mu \gamma_L}{g} \int_{l_1}^{l_2} v \, dc . \tag{15}$$

Zu den aus Abb. 6 ersehbaren Bezeichnungen müssen für die folgenden Ausführungen noch einige weitere eingeführt werden:

$$\xi_z^{\mathrm{I}} = \frac{\Delta p_z^{\mathrm{I}}}{\mu \frac{v_2^2 \gamma_L}{2 g}}$$ Druckverlustbeiwert des Düseneinlaufs,

$$\xi_z^{\mathrm{II}} = \frac{\Delta p_z^{\mathrm{II}}}{\mu \frac{v_2^2 \gamma_L}{2 g}}$$ Druckverlustbeiwert der gesamten Meßdüse.

Mit Hilfe der Beziehung (15) sollen nun die Druckgefälle Δp_z^{II} und Δp_z^{I}, sowie die dimensionslosen Druckverlustbeiwerte ξ_z^{II} und ξ_z^{I} ermittelt werden. Für den Fall $v = v_2 = \text{konst.}$ findet man

$$\Delta p_z^{\mathrm{II}} = \Delta p_s^{\mathrm{II}} - \Delta p_L^{\mathrm{II}} = \frac{\mu \gamma_L}{g} v_2 (c_2 - c_0) = \xi_z^{\mathrm{II}} \mu \frac{v_2^2 \gamma_L}{2 g} , \tag{16}$$

$$\xi_z^{\mathrm{II}} = 2 \left(\frac{c_2}{v_2} - \frac{c_0}{v_2} \right)$$

und ferner

$$\Delta p_z^{\mathrm{I}} = \Delta p_s^{\mathrm{I}} - \Delta p_L^{\mathrm{I}} = \frac{\mu \gamma_L}{g} v_2 (c_1 - c_0) = \xi_z^{\mathrm{I}} \mu \frac{v_2^2 \gamma_L}{2 g} , \tag{17}$$

$$\xi_z^{\mathrm{I}} = 2 \left(\frac{c_1}{v_2} - \frac{c_0}{v_2} \right) .$$

Die Annahme $v = v_2 =$ konst. wurde der Einfachheit wegen auch für die konische Verengung (Bereich zwischen Meßebene 0—0 und 1—1) zugrunde gelegt, obwohl diese Voraussetzung in der konischen Verengung nicht erfüllt ist. Der dadurch entstehende Fehler kann vernachlässigt werden.

Die Druckgefälle Δp_z^{II} und Δp_z^{I} werden durch Messung bestimmt. Für die einzelnen Meßpunkte werden die Kenngrößen ξ_z^{I}, ξ_z^{II} und μ bestimmt und ξ_z^{I} bzw. ξ_z^{II} in Abhängigkeit von μ graphisch aufgetragen. Aus dieser Auftragung können ξ_z^{I} und ξ_z^{II} für $\mu =$ konst. (z. B. $\mu = 2, 4, 6$) entnommen und auf Grund der nachstehenden Beziehungen Schlüsse auf die Geschwindigkeit des Gutes in der Düse gezogen werden. Es muß sein

$$\frac{c_2}{v_2} = \frac{1}{2} \cdot \xi_z^{II} + \frac{c_0}{v_2}, \tag{18}$$

$$\frac{c_1}{v_2} = \frac{1}{2} \xi_z^{I} + \frac{c_0}{v_2}. \tag{19}$$

Um eine Aussage über die Größe von c_1 und c_2 machen zu können, muß c_0 bekannt sein. Bezüglich der Geschwindigkeit c_0 kann man sagen, daß $v_0 > c_0 > 0$ sein muß. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß ein Teil der Teilchen auf die Wand des konischen Einlaufs zwischen den Meßebenen 0—0 und 1—1 (Abb. 6) auftreffen wird, wobei durch den Aufprall ein Teil der Geschwindigkeit vernichtet wird. Es besteht daher die Möglichkeit, daß die Geschwindigkeit c_0 wesentlich kleiner als v_0 wird, auch wenn in der Rohrleitung vor der Düse c_0 und v_0 praktisch gleich groß angenommen werden können. Um auf alle Fälle klare Verhältnisse zu erhalten, wurde in vielen Fällen ein Einlauf nach Abb. 7 verwendet. Bei dieser Anordnung wurde vor der zylindrischen Düse ein Prallkegel angeordnet, auf den die ankommenden Gutteilchen auftreffen. Dabei wird die Geschwindigkeitsenergie der Gutteilchen vernichtet, so daß c_0 praktisch gleich 0 gesetzt werden kann.

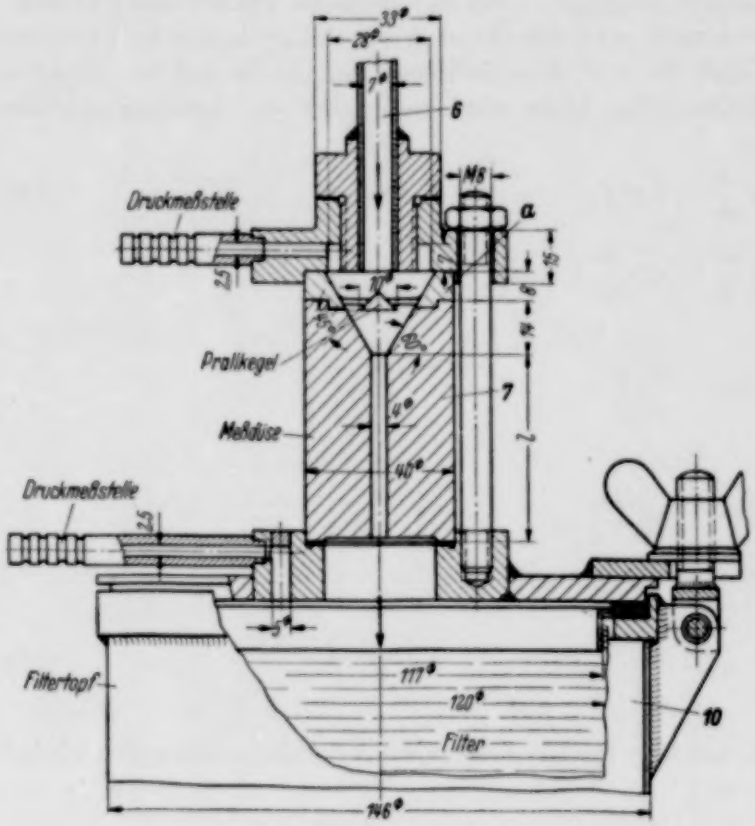

Abb. 7. Anordnung der Meßdüse.

Der Verlauf der Gutgeschwindigkeit in der zylindrischen Bohrung zwischen den Meßebenen 1—1 und 2—2 kann dadurch bestimmt werden, daß man die Druckdifferenzen Δp_z^{II} für Düsen mit verschiedenen Längen l ermittelt. Man kann die Größe c_2 am Düsenende aus (15) bzw. (18) und (19) bestimmen und damit den Verlauf der Gutgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Düsenlänge festlegen.

Zur Bestimmung der Werte n und w wird nun die Düsenlänge in einzelne Intervalle von der Länge Δl eingeteilt und hierfür die Größen n und w errechnet. Diese Intervalle werden zweckmäßigerweise so gewählt, daß sie der Längendifferenz zweier in ihrer Länge aufeinanderfolgender Meßdüsen entsprechen. Für die Berechnung des Wertes n kann man von (2) ausgehen. Unter den getroffenen Voraussetzungen der Vernachlässigbarkeit von Wandreibungskräften und Gutgewicht bekommt man mit

$$W = m \frac{dc}{dt} \qquad \text{und} \qquad Q = m\,g$$

den Wert

$$n = \frac{1}{g} \frac{dc}{dt} = \frac{1}{g} \frac{dc}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{c}{g} \frac{dc}{dl}. \tag{20}$$

Für die numerische Berechnung geht man zu Differentialquotienten über und erhält

$$n = \frac{c_m}{g} \frac{\Delta c}{\Delta l} = \frac{v_2^2}{g\,\Delta l} \frac{\Delta c}{v_2} \frac{c_m}{v_2}. \tag{21}$$

Der Wert c_m/v_2 für ein Intervall wird dadurch ermittelt, daß man, ausgehend von der angenommenen Geschwindigkeit c_0 am Anfang der Düse (bei Einbau des Kegels nach Abb. 7 wird $c_0 = 0$) die Geschwindigkeitszunahmen in den einzelnen Intervallen addiert und für das untersuchte Intervall eine Zunahme im Mittel von $\frac{1}{2}\,\Delta c$ annimmt. Aus den Werten $\Delta c/v_2$ und c_m/v_2 wird dann $(n\,\gamma_k/\gamma_0)$, w und die Materialdichte $\mu^{\oplus}$ errechnet. Die Größe $\mu^{\oplus}$ ist definiert als

$$\mu^{\oplus} = \mu\,\frac{v}{c}$$

und stellt ein Maß für den gegenseitigen Teilchenabstand dar. Die gefundenen Meßwerte werden in ein $(n\,\gamma_k/\gamma_0, w)$-Diagramm eingetragen, aus dem der Widerstand des Gemisches, ausgedrückt durch die Größe des gleichwertigen Kugeldurchmessers d_k abgelesen werden kann. Durch Auftragen der einzelnen Meßwerte kann man ein Bild über den Luftwiderstand des Gutes unter den verschiedenen Betriebsbedingungen gewinnen. Dabei ist zu beachten, daß durch die Aufteilung in einzelne Intervalle gewisse Fehler bei der Auswertung entstehen können, die aber aus der Lage der einzelnen Punkte zu erkennen sind und gegebenenfalls leicht korrigiert werden können.

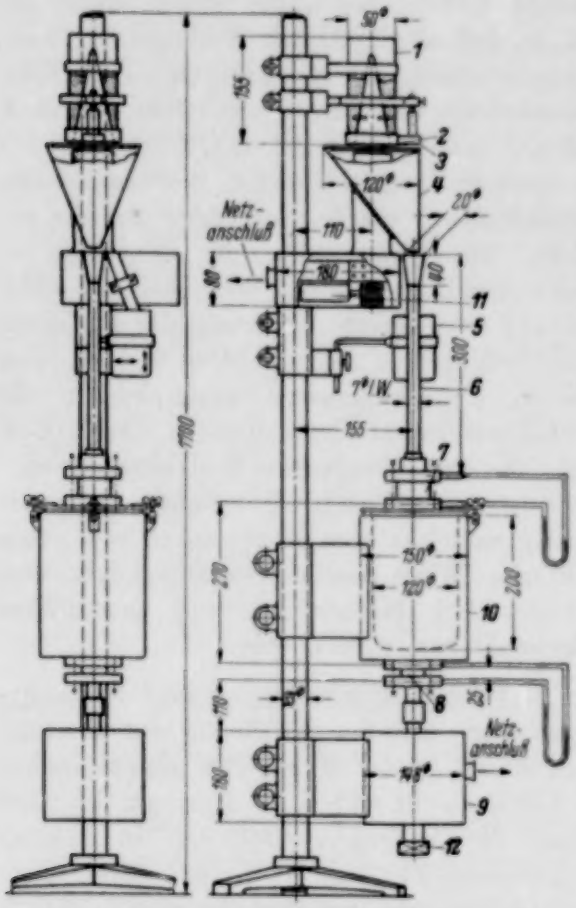

Abb. 8. Gerät zur Bestimmung des Luftwiderstandes von Stäuben und Mehlen.

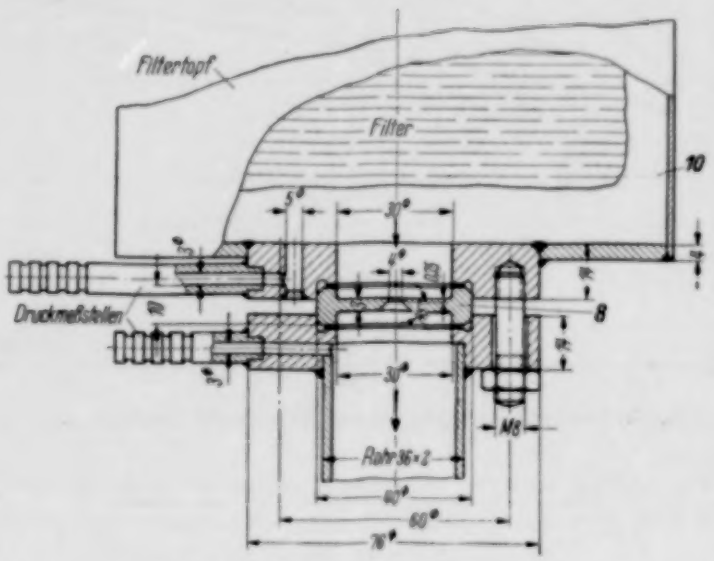

Abb. 9. Meßblende zur Luftmengenmessung.

2. Beschreibung des Meßgerätes. Zur Durchführung der beschriebenen Untersuchungen wurde das in Abb. 8 dargestellte Gerät entwickelt. Das zu untersuchende Gut wird in den Aufgabebehälter *1* eingefüllt. Den Boden dieses Aufgabebehälters bildet ein Drehteller *2*, der durch einen Kurzschlußläufermotor angetrieben wird. Die Drehzahl des Drehtellers kann durch Änderung der Übersetzung mit Hilfe von Stufenscheiben verändert werden. Durch Verschieben der Behälterwand in vertikaler Richtung wird ein Spalt freigegeben, durch den das Material aus dem Aufgabebehälter *1* ausfließt. Um einen gleichmäßigen Ausfluß zu erreichen, wurde auf dem Drehteller ein Konus mit Seitenarmen befestigt, der sich mit dem Teller dreht und in dem Behälter gewissermaßen als Rührwerk wirkt. Das Material wird durch einen zur Feinregulierung der Aufgabemenge verstellbaren Abstreifer *3* vom Drehteller abgestreift und fällt in den Trichter *4*, der um eine außerhalb der Symmetrielinie liegende Achse geschwenkt werden kann. Das Material fällt entweder in das Auffanggefäß *5* oder in das Zuführungsrohr *6* und wird damit der Meßdüse zugeführt. Dieses Zuführungsrohr *6* zur Meßdüse hat an einem Ende eine konische Erweiterung, durch die Luft aus der Atmosphäre angesaugt wird und sich mit den Festteilchen mischt. Das Gemisch strömt durch die Meßdüse *7* und gelangt in ein Stoffilter, in dem das Material zurückgehalten wird. Die gereinigte Luft durchfließt die Meßblende *8*, anschließend das Gebläse *9* und gelangt dann ins Freie. Das Filter ist in den Filterkasten *10* eingebaut. Durch Lösen einiger Flügelschrauben kann der Deckel des Filterkastens entfernt und das Filter ausgebaut werden. Die Meßdüse ist in Abb. 7 dargestellt. Sie sitzt direkt auf dem Filterdeckel, der auch eine Meßbohrung zur Messung des Druckes hinter der Düse enthält. In die Meßdüse ist aus den auf Seite 326 dargelegten Gründen

ein Kegel vor der Düse eingebaut worden, der durch Entfernen des Einsatzes *a* Abb. 7 ausgebaut werden kann, so daß die Düse auch ohne Kegel betrieben werden kann. Die Bohrung für die Druckmeßstelle vor der Düse mündet in den Raum zwischen Düse und Zuführrohr *6* zur Meßdüse. Die Meßblende *8* ist in Abb. 9 dargestellt. Sie wurde wie die Meßdüse *7* gleichfalls in den Filterkasten eingebaut. Die eine Druckentnahmestelle für die Meßblende mündet in den Filterkasten, die andere in das an die Meßblende anschließende Rohr. Das Gerät wurde so ausgeführt, daß alle Teile leicht ausgebaut bzw. ausgewechselt werden können. Die Differenzdrücke bzw. die Wirkdrücke der Meßdüse *7* und der Meßblende *8* werden mit wassergefüllten U-Rohren gemessen. Die Meßblende *8* wurde mit einer Gasuhr geeicht. Die Einstellung der Luftmenge erfolgt durch Drosselung des Regulierschiebers *12* oder durch Änderung der Drehzahl des Gebläses *9*. Das Gebläse *9* wird von einem Universalmotor angetrieben; die Gebläsedrehzahl kann deshalb durch Vorschalten eines *Ohm*schen Widerstandes einfach geregelt werden. Das Gebläse ist zweistufig und hat eine Förderhöhe von etwa 500 mm W. S. bei einem Durchsatz von 6 l/sec. bei Normallast und maximaler Drehzahl von 3000 U/min.

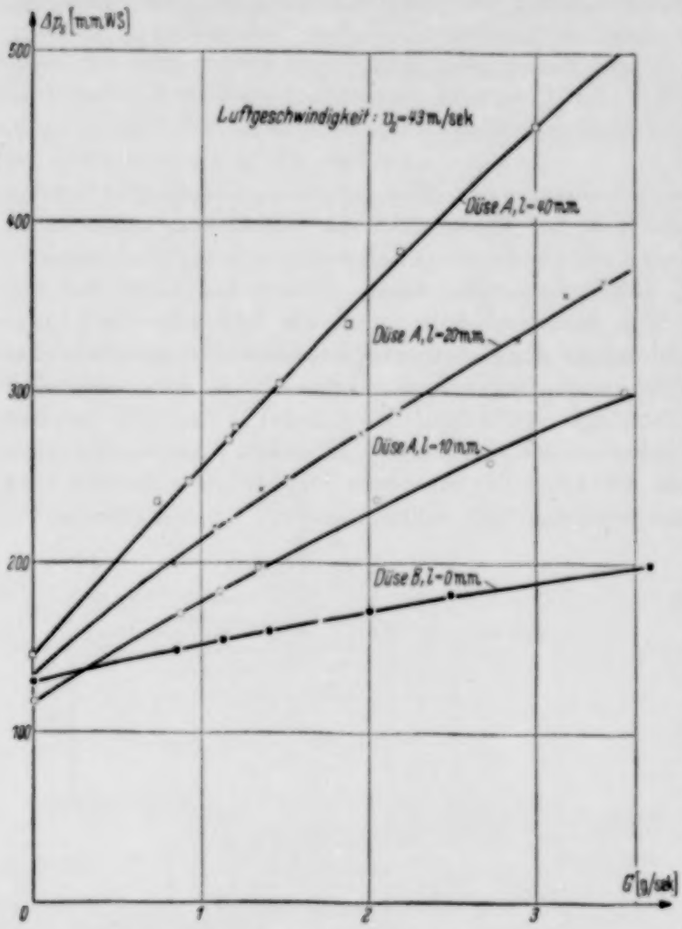

Abb. 10. Druckverlust Δp_s in Abhängigkeit von der Gutmenge G.

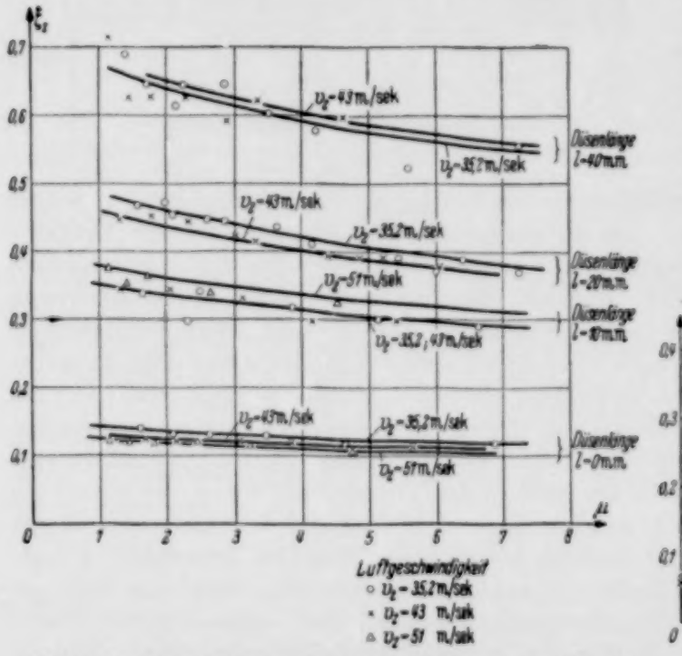

Abb. 11. Druckverlustbeiwert ξ_s in Abhängigkeit von der Materialbeladung μ. Material: Glaskugeln.

3. Versuchsdurchführung und Versuchsergebnisse. Die Durchführung der Messungen erfolgt in der Weise, daß man zunächst mit dem Gerät reine Luft ansaugt. Es wird dann die Aufgabevorrichtung in Betrieb genommen und mit Hilfe des Abstreifers eine bestimmte Gutmenge eingestellt. Durch Änderung des Widerstandes im Stromkreis des Motors stimmt man die Drehzahl des Absaugegebläses so ab, daß eine bestimmte, gewünschte Luftmenge angesaugt wird. Durch kurzzeitiges Schwenken des Trich-

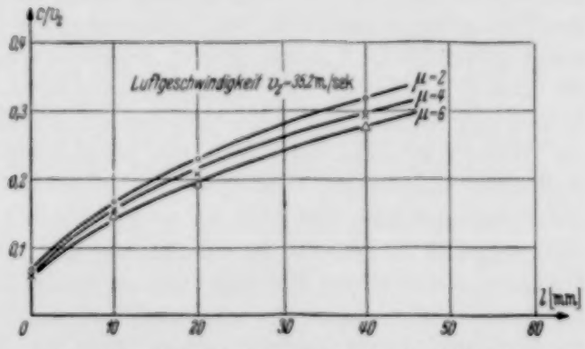

Abb. 12. Geschwindigkeitsverhältnis c/v_0 in Abhängigkeit von der Düsenlänge l. Material: Glaskugeln.

ters *4* fällt das Gut in das Auffanggefäß *5*. Mit einer Stoppuhr wird die Aufgabezeit gemessen und die aufgefangene Gutmenge durch Abwiegen des Auffanggefäßes *5* bestimmt. Diese Gutmengenbestimmung wird vor und nach jeder Ablesung des Wirkdruckes an der Meßblende und

an der Meßdüse vorgenommen. Es wäre natürlich grundsätzlich auch möglich, durch Auswiegen des Filters im Filterkasten *10* die aufgegebene Gutmenge zu bestimmen, jedoch hat das andere Verfahren, insbesondere bei vielen Messungen, den Vorteil der Einfachheit und kurzen Zeitdauer. Die Messungen erfolgen in der Regel in der Weise, daß für eine konstante Gasmenge bzw. für einen konstanten Blendenwirkdruck Δp_{Bl} die Differenzdrücke Δp_s^{I} bzw. Δp_s^{II} bei verschiedenen Gutmengen bestimmt werden. Die gemessenen Werte Δp_s^{I} und Δp_s^{II} werden dann zweckmäßigerweise in Abhängigkeit von G aufgetragen. Diese Messungen werden für Düsen mit verschiedenen Längen, z. B. $l = 5$, 10, 20, 40 und 80 mm, durchgeführt.

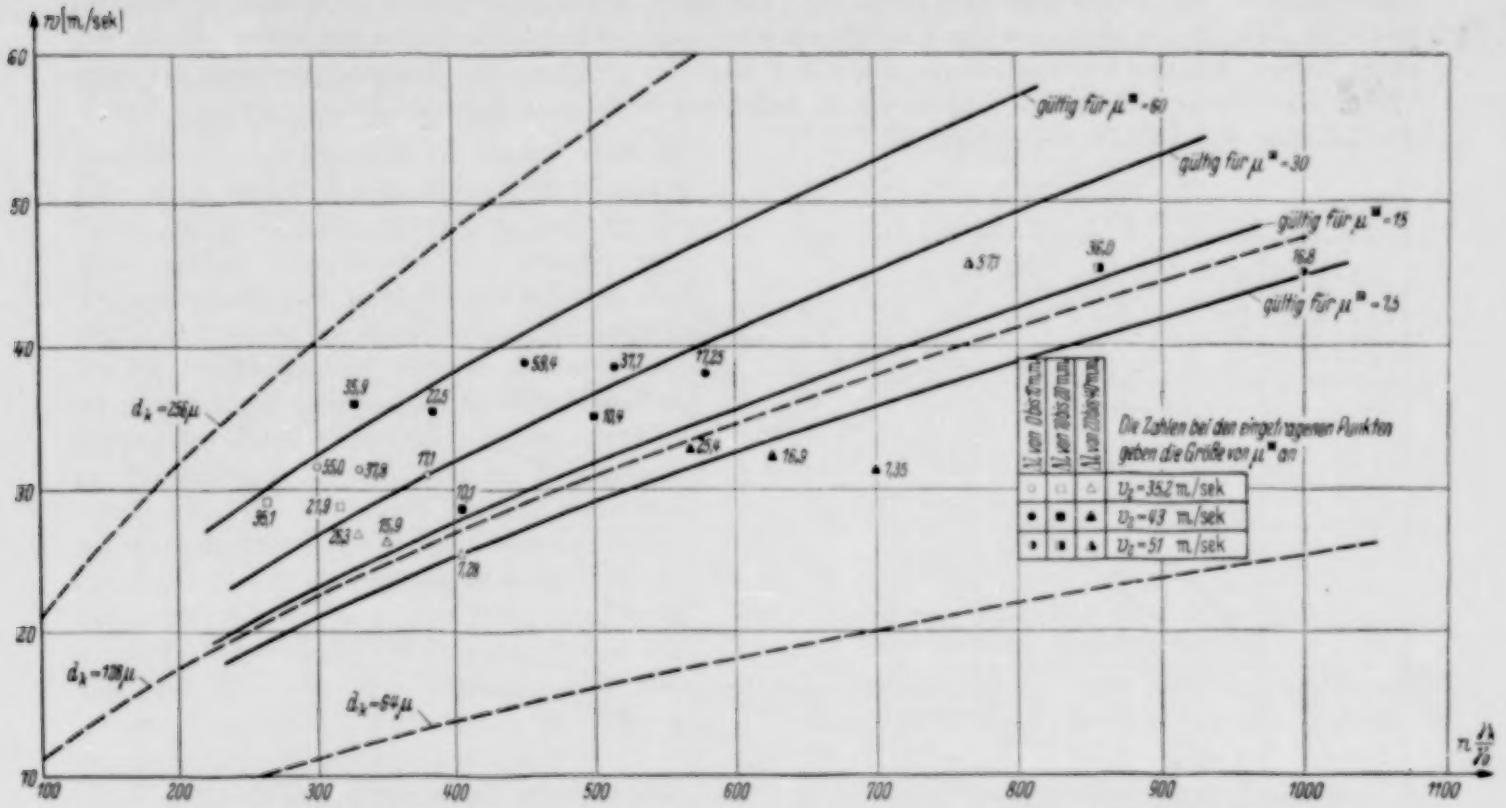
v₂[m/sek]
gültig für μ* = 60
gültig für μ* = 30
gültig für μ* = 15
gültig für μ* = 7,5
d_k = 256 μ
d_k = 128 μ
d_k = 64 μ
Die Zahlen bei den eingetragenen Punkten geben die Größe von μ* an
v₂ = 35,2 m/sek
v₂ = 43 m/sek
v₂ = 51 m/sek
π·d_k/v₀

Abb. 13. Diagramm nach Abb. 2 mit aus Versuchen gewonnenen Punkten. Material: Glaskugeln (Durchmesser 90 bis 140 μ).

Zur Nachprüfung der durchgeführten Überlegungen wurden Gemische zweier verschiedener Stoffe, nämlich Glaskugeln und Aluminiumsilikat (Kontaktstoff), in dem beschriebenen Meßgerät untersucht.

α) Glaskugeln. Die Glaskugeln sind im Handel erhältlich. Sie haben einen Durchmesser zwischen 90 und 140 μ und ein spezifisches Gewicht $\gamma_k = 2600$ kg/m³. Bei der Verwendung dieser Glaskugeln bestand die Gewähr, daß sich das Gemisch aus Teilchen etwa gleicher Größe zusammensetzt. Außerdem ist auch die Form und der Luftwiderstand des einzelnen Teilchens genau bekannt. Die Voraussetzungen der Rechnung sind damit im vorliegenden Fall erfüllt, so daß ein Vergleich der Rechnung mit den Versuchsergebnissen möglich ist.

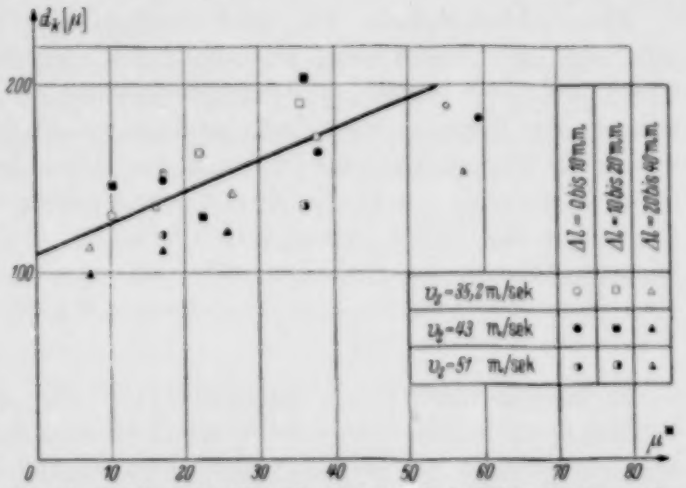

Abb. 14. Gleichwertiger Kugeldurchmesser d_k in Abhängigkeit von der Materialdichte $\mu^{\oplus}$. Material: Glaskugeln von 90 bis 140 μ.

Die Untersuchungen wurden mit der Meßdüse (Abb. 7) mit Kegeleinsatz durchgeführt. Es wurden Meßdüsen mit den Längen l von 0, 10, 20 und 40 mm verwendet. In Abb. 10 * wurde der Druckverlust Δp_s in Abhängigkeit von G für $v =$ konst. für die verschiedenen Düsen aufgetragen. Es zeigt sich, daß die Kurven nahezu linear mit G ansteigen. Aus den Meßwerten wurde ξ_z^{I} bzw. ξ_z^{II} ermittelt und in Abhängigkeit von μ in Abb. 11 * dargestellt. Aus dieser Abbildung wurden dann die ξ_z^{I} und ξ_z^{II}-Werte für $\mu = 2$, 4 und 6, sowie für die Geschwindigkeiten $v_2 = 35{,}2$, 43

* Diese Abbildung gibt als Beispiel den charakteristischen Verlauf wieder. Kurven für weitere Luftgeschwindigkeiten und vollständige Zahlentafeln siehe die Dissertation des Verfassers.

und 51 m/sek entnommen und unter der Annahme, daß $c_0 = 0$ und $c_1 = \frac{1}{2}\,\xi_z^{\mathrm{I}}$ gesetzt werden kann, $c_2 = \frac{1}{2}\,\xi_z^{\mathrm{II}}$ bestimmt. In Abb. 12 * wurde der Verlauf des Geschwindigkeitsverhältnisses c/v_2 über der Düsenlänge aufgetragen. Er ergibt sich aus der Summe der Geschwindigkeitssteigerungen Δc in den einzelnen Intervallen.

Die Lage der einzelnen Meßpunkte im (n, w)-Diagramm zeigt Abb. 13. Es ist verständlich, daß die Meßpunkte eine gewisse Streuung aufweisen werden. Der Luftwiderstand des Gemisches liegt zwischen einem gleichwertigen Korndurchmesser $d_k = 110\,\mu$ und $d_k = 200\,\mu$. Versucht man die Punkte gleicher Materialdichte miteinander zu verbinden, so zeigt sich, daß mit zunehmender Materialdichte der Luftwiderstand abnimmt. Um diese Abhängigkeit besser erkennen zu können, wurde in Abb. 14 der gleichwertige Kugeldurchmesser d_k in Abhängigkeit von der Materialdichte $\mu^{\oplus}$ aufgetragen. Bei der Interpolation auf $\mu^{\oplus} = 0$ liegt der gleichwertige Kugeldurchmesser bei etwa $110\,\mu$. Eine Nachprüfung der Kugeln ergab, daß dieser Wert etwa dem wirklichen mittleren Kugeldurchmesser des Gemisches entspricht.

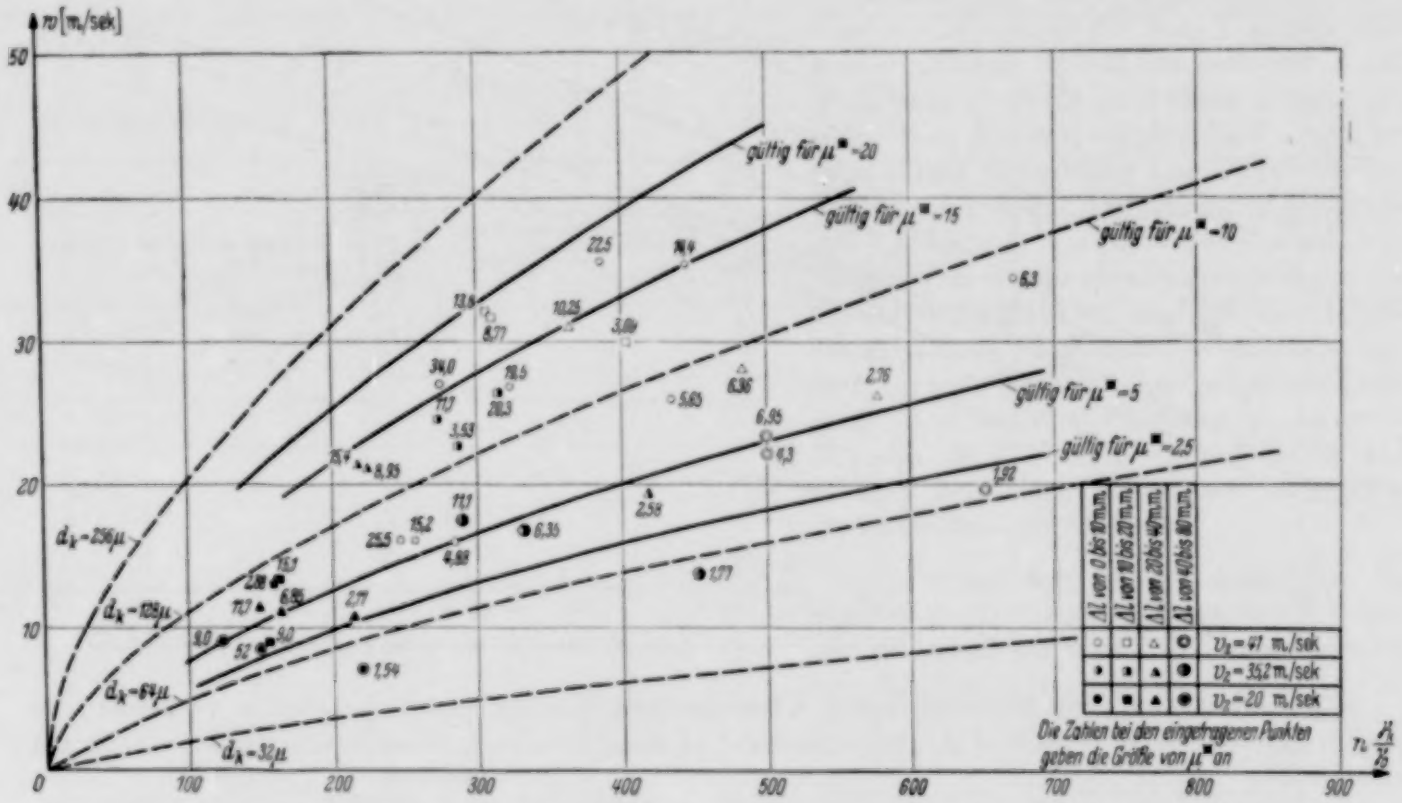
w [m/sek]
gültig für μ* = 20
gültig für μ* = 15
gültig für μ* = 10
gültig für μ* = 5
gültig für μ* = 2,5
d_k = 236 μ
d_k = 125 μ
d_k = 64 μ
d_k = 32 μ
Δl von 0 bis 10 mm
Δl von 10 bis 20 mm
Δl von 20 bis 40 mm
Δl von 40 bis 80 mm
v_2 = 41 m/sek
v_2 = 31,2 m/sek
v_2 = 20 m/sek
Die Zahlen bei den eingetragenen Punkten geben die Größe von μ* an
n √(γ_k/γ_l)

Abb. 13. Diagramm nach Abb. 2 mit aus Versuchen gewonnenen Punkten. Material: Kontaktstoff (Aluminiumsilikat).

Eine Abhängigkeit des gleichwertigen Kugeldurchmessers d_k von der Luftgeschwindigkeit v läßt sich nicht feststellen. Dies bedeutet, daß die für die Einzelkugel gültigen Abhängigkeiten in bezug auf die Anströmgeschwindigkeiten auch für das Gemisch gelten. Bezüglich des Luftwiderstandes des Gemisches in den einzelnen Intervallen ist festzustellen, daß in dem Längenintervall von 0 bis 10 mm und von 20 bis 40 mm etwa die gleichen Werte ermittelt wurden, während sich für das Intervall von 10 bis 20 mm etwas geringere Werte ergaben. Diese Unterschiede sind wahrscheinlich auf Meßungenauigkeiten bzw. auf kleine Unterschiede in den Abmessungen der Düsen zurückzuführen. Es erscheint daher zulässig zu sein, Mittelwerte zu verwenden, zumal die Korrektur eines Wertes infolge des Zusammenhanges der einzelnen Meßgrößen untereinander auch die anderen Werte beeinflussen muß.

β) Kontaktstoff (Aluminiumsilikat). Die gleichen Untersuchungen wie mit den Glaskugeln wurden mit dem Kontaktstoff (Aluminiumsilikat), ausgeführt. Sein spezifisches Gewicht ist $\gamma_k = 1500\ \mathrm{kg/m^3}$. Das Gemisch besteht aus Körnern verschiedener Größe. Die Messung und Auszählung einer genügend großen Anzahl unter dem Mikroskop ergab einen mittleren Durchmesser des Gutes von etwa $70\,\mu$. Die Messungen wurden für drei verschiedene Geschwindigkeiten ($v_2 = 41$, 31,5 und 20 m/s) durchgeführt. Wie bei den Versuchen mit den Glaskugeln wurde auch hier die Meßdüse nach Abb. 7 mit dem Prallkegeleinsatz verwendet. Die Düsenlängen betrugen 0, 10, 20, 40 und 80 mm.

* Siehe Fußnote * auf S. 329.

Die Auswertung erfolgt in der gleichen Weise wie bei den Messungen mit den Glaskugeln. Die Kurvenblätter 15 und 16* stellen Versuchsergebnisse dar. Aus der Lage der Meßpunkte ergibt sich, daß in diesem Fall auch eine Abhängigkeit des gleichwertigen Kugeldurchmessers von der Luftgeschwindigkeit besteht. Für alle Meßpunkte, die zur gleichen Luftgeschwindigkeit gehören, wurde ein Mittelwert gebildet und in Abb. 16 eingetragen. Man erkennt, daß mit abnehmender Luftgeschwindigkeit v der Luftwiderstand abnimmt. Die auftretenden Streuungen der Meßwerte bei den einzelnen Luftgeschwindigkeiten dürften auf Ungenauigkeiten der Messungen und der Meßeinrichtungen zurückzuführen sein.

c) Sonstige Verfahren. Dieser Abschnitt soll einen Überblick über die in der Literatur veröffentlichten Verfahren geben, die auf ähnlichen Überlegungen und Versuchsanordnungen wie die bisher beschriebenen Methoden beruhen.

1. Impulsmeßverfahren nach Barth[1]. Im Verfahren nach Abschnitt 2 konnte man die Gutgeschwindigkeit c in einem zylindrischen Rohr ohne weiteres errechnen, sobald der Druckverlauf über diesen Weg bekannt war. Voraussetzung für diese Rechnung war, daß außer der Beschleunigungskraft alle anderen Kräfte vernachlässigt werden durften. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Die Beschleunigung des Gutes nimmt mit zunehmender Gutgeschwindigkeit ab und wird im Beharrungszustand zu Null, wenn das Material seine Endgeschwindigkeit erreicht hat. Der Luftwiderstand des Gutes ist dann genau so groß wie die Kraft, mit der es an der Rohrwand reibt, zuzüglich des Gutgewichtes. Für diesen Fall läßt sich die Gutgeschwindigkeit nicht mehr einfach errechnen, da in dem Reibungsfaktor eine weitere Unbekannte aufgetreten ist. Mit dem Impulsmeßgerät nach *Barth* kann die Materialgeschwindigkeit gemessen werden.

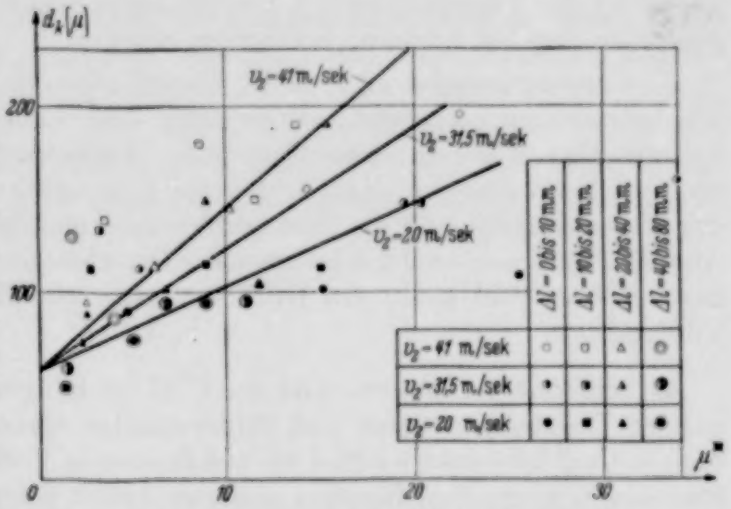

Abb. 16. Gleichwertiger Kugeldurchmesser d_k in Abhängigkeit von der Materialdichte $\mu^{\otimes}$. Material: Kontaktstoff.

Das Material–Luft-Gemisch wird hierbei, aus der waagerechten Förderleitung kommend, in einen reibungslos aufgehängten unten offenen Zylinder geleitet und in ihm um 90° senkrecht nach unten abgeführt. Auf diese Weise wird der gesamte Impuls des Gemisches in Richtung der Förderleitung auf den Zylinder übertragen und kann mit Waage und Gewichten abgewogen werden. Ebenso wie der Impuls des Gemisches kann der der reinen Luft bestimmt werden. Die Differenz zwischen beiden ergibt den Impulsanteil des Materials. Über den Impulssatz läßt sich hieraus leicht die Gutgeschwindigkeit bestimmen. Zusammen mit den Meßwerten der Luftgeschwindigkeit, der geförderten Gutmenge je Zeiteinheit und des Druckes können jetzt wieder die den Luftwiderstand kennzeichnenden Werte w und d_k erhalten werden.

2. Widerstandsbestimmung nach Blaine[2]. Bei diesem Verfahren wird vom Widerstand, den eine Materialsäule einem durchströmenden Gas entgegensetzt, auf die Kornfeinheit geschlossen. Dies ist nur möglich, wenn das Zwischenraumvolumen der untersuchten Materialsäule immer das gleiche ist. Um dies zu erreichen, wird eine jeweils genau bestimmte Gewichtsmenge, d. h. ein genau bestimmtes Volumen des Materials in den zylindrischen Hohlraum des von Blaine vorgeschlagenen Meßgerätes eingefüllt. Aus der Durchflußmenge und dem Druckverlust des durch das Material strömenden Gases kann die Korngröße bestimmt werden. Gegenüber den bisher beschriebenen Verfahren hat die Methode den Nachteil, daß nicht im freien Luftstrom gemessen wird und deshalb der Einfluß der Materialschichtung nicht ausgeschaltet werden kann.

3. Verfahren nach H. M. Carlson, P. M. Frazier und R. B. Engdahl[3]. Die Verfasser haben in eine Rohrleitung eine Düse und dahinter eine Blende eingebaut. Bei Förderung eines Gas–Material-Gemisches benützen sie die Wirkdruckanzeige an der Blende zur Luftmengenbestimmung und die

* Diese Abbildung gibt als Beispiel den charakteristischen Verlauf wieder. Kurven für die weiteren Luftgeschwindigkeiten und vollständige Zahlentafeln siehe die Dissertation des Verfassers.

[1] *W. Barth*, Strömungsvorgänge beim Transport von Festteilchen und Flüssigkeitsteilchen in Gasen. Chemie-Ing.-Technik 30 (1958), S. 171.

[2] *F. Gille*, Die Prüfung der Mahlfeinheit mit dem Gerät von *Blaine*, Schriftenreihe der Zementindustrie Heft 7, 1951.

[3] *H. M. Carlson, P. M. Frazier* u. *R. B. Engdahl*, Trans. Am. Soc. Mech. Engs 70 (1948) S. 65.

Wirkdruckanzeige an der Düse zur Materialmengenbestimmung. Da jedoch alle theoretischen Überlegungen von der Verwendung der Durchflußgleichung für Düsen und Blenden ausgehen und die Einflüsse der Materialdichte, der *Froude*schen Zahl usw. nur als Korrektur der Konstanten der Durchflußgleichung erscheinen, kann das Verfahren nur nach Eichung der gegebenen Anlage verwendet werden.

4. Verfahren nach L. Farbar[1]. Dieser baute zylindrische Meßdüsen in pneumatische Förderleitungen ein und bestimmte den Druckabfall längs dieser Düsen. Die Messungen zeigen den bekannten Verlauf des Druckabfalls von Gas–Material-Gemischen in zylindrischen Düsen. Die theoretischen Überlegungen gehen von der Anwendung der Energiegleichung aus. Dies ist jedoch nicht zulässig, da mit Energiebetrachtungen die Materialreibung nicht erfaßt werden kann. Dagegen ist die Verwendung des Impulssatzes exakt, denn bei ihm müssen nur äußere Kräfte, die gemessen werden können, betrachtet werden.

5. Gutmengenmeßgerät nach W. Barth[2]. Das Gerät ist so ausgeführt, daß es in pneumatische Förderleitungen eingebaut werden kann. Die charakteristischen Teile der Meßeinrichtung sind ein zylindrisches und ein darauffolgendes, diffusorartig erweitertes Rohr. Durch geeignete Maßnahmen kann erreicht werden, daß die Druckdifferenzen im zylindrischen Teil nur abhängig von der Materialmenge und die Druckdifferenzen im Diffusor nur abhängig von der Luftmenge werden. Aus den gemessenen Druckunterschieden zwischen Anfang und Ende des zylindrischen Rohres bzw. Anfang und Ende des Diffusors kann mit Hilfe einer Eichkurve die Gutmenge bestimmt werden.

4. Schlußbemerkungen. Ziel der Untersuchungen war es, eine möglichst einfache und allgemein gültige Darstellungsweise des Widerstandes eines Feststoff–Luft-Gemisches zu finden. Unter diesem Gesichtspunkt wurden die bekanntesten Verfahren der Widerstandsbestimmung betrachtet.

Für manch wertvollen Hinweis zu dieser Arbeit möchte der Verfasser Herrn Prof. Dr.-Ing. *W. Barth* aufrichtig danken.

(Eingegangen am 22. November 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Walter Rausch*, Hof/Saale, Kulmbacherstr. 29.

[1] *L. Farbar*, Industrial and Engineering Chemistry 44 (1952) S. 2947.
[2] *W. Barth, R. Nagel* u. *K. van Waveren*, Chemie-Ingenieur-Technik 29 (1957) S. 599.

Über eine zweckmäßige Walzenform für das Auswalzen dünner Folien

Herrn Prof. Dr. *Rudolf Sonntag* zum 65. Geburtstag gewidmet

Von **W. Roth**

1. Einleitung. Zur Auswalzung dünner Folien werden Walzen verwendet, deren Kontur nicht zylindrisch ist. In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren angegeben, welches es gestattet, die erforderliche Kontur bis zu einer gewünschten Genauigkeit zu ermitteln. Wenn z. B. Aluminiumfolien mit einer Stärke von 0,02 mm ausgewalzt werden, dann bedingt ein so geringes Maß eine außerordentlich sorgfältige Ausführung der Walzen. Die Walzen müssen nicht nur auf Hochglanz poliert sein (Rauhigkeit etwa 0,2 μ), sondern die Kontur muß auch nach einem genauen Gesetz von der Zylinderform abweichen. Wären die Walzen nämlich genau zylindrisch, so würde infolge der durch die Kräfte P (Abb. 1) bedingten Durchbiegungen die Stärke der Folie

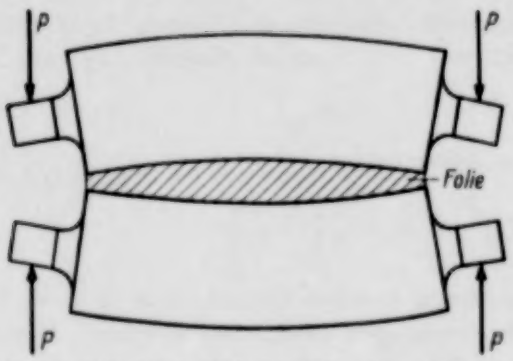

Abb. 1. Zylindrische Walzen in deformiertem Zustand.

Abb. 2. Walze mit faßförmiger Kontur.

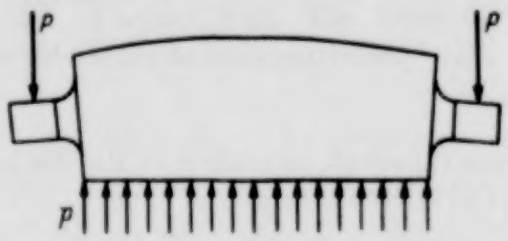

Abb. 3. Belastete Walze mit faßförmiger Kontur.

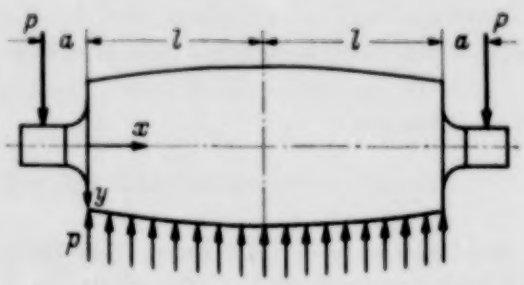

Abb. 4. Belastungen an der undeformierten Walze.

zur Mitte hin zunehmen. Die Walzen würden sich wesentlich an den Rändern abstützen, was einen relativ starken Fehler zur Folge hätte. Um eine solche ungleichmäßige Folienstärke zu vermeiden, müssen die Walzen faßförmig ausgeführt werden (Abb. 2). Die genaue Kontur der Walze ergibt sich dabei aus der Bedingung, daß nach Aufbringung der Kräfte P auf die Zapfen sich eine konstante Pressung p in der äußeren Druckfaser der Walze einstellen muß, wobei noch gefordert wird, daß diese Druckfaser in eine gerade Linie übergeht (Abb. 3).

2. Lösung des Problems. Eine Lösung der Aufgabe wird über die Differentialgleichung der elastischen Linie gewonnen. In Abb. 4 sind an der undeformierten Walze die wirkenden Kräfte eingezeichnet. Das Biegemoment an der Stelle x ist

$$M(x) = P\,(a + x) - p\,\frac{x^2}{2},$$

wobei $p = P/l$ gesetzt werden kann, wie die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschiebung in vertikaler Richtung aussagt. Die Differentialgleichung der elastischen Linie ist somit

$$y'' = \frac{P\left[a + x - \dfrac{x^2}{2\,l}\right]}{E\,J}. \qquad (1)$$

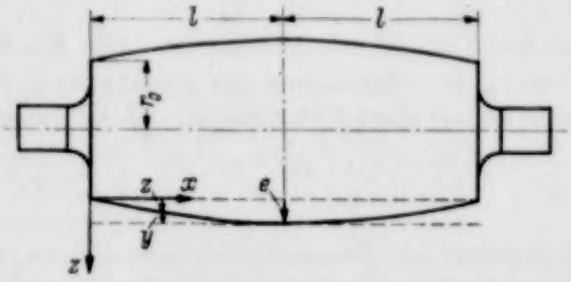

Abb. 5. Zweckmäßige Wahl des Koordinatensystems zur Beschreibung der Kontur.

Bei der Integration dieser Gleichung muß nun darauf geachtet werden, daß das Trägheitsmoment J nicht konstant ist. Wegen der jedoch nur geringen Abweichung von der Zylinderform

darf in z (Abb. 5) linearisiert werden, so daß

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_0}\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^{-4} \approx \frac{1}{J_0}\left(1 - 4\,\frac{z}{r_0}\right)$$

ist, mit $J_0 = \pi\, r_0^4/4$ (Abb. 5). Gleichung (1) hat damit die Form

$$y'' = \frac{P}{E\,J_0}\left(1 - 4\,\frac{z}{r_0}\right)\left(a + x - \frac{x^2}{2\,l}\right). \tag{1a}$$

Soll die Druckfaser der Walze in eine gerade Linie übergehen, so muß (Abb. 5) die geometrische Bedingung

$$y = e - z$$

oder

$$y'' = -z''$$

erfüllt sein. Da die Gleichung der elastischen Linie selbst weniger interessiert, wird y'' aus (1a) eleminiert, und es liegt so die Differentialgleichung für die Kontur der Walze

$$z'' + \frac{P}{E\,J_0}\left(1 - 4\,\frac{z}{r_0}\right)\left(a + x - \frac{x^2}{2\,l}\right) = 0 \tag{2}$$

vor. Aus Symmetriegründen empfiehlt sich die Substitution

$$x - l = u\,,$$

und aus (2) erhält man für $z = z(u)$ die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{du^2} - z\,\frac{4\,P}{E\,J_0\,r_0}\left[\left(a + \frac{l}{2}\right) - \frac{u^2}{2\,l}\right] = -\,\frac{P}{E\,J_0}\left[\left(a + \frac{l}{2}\right) - \frac{u^2}{2\,l}\right]. \tag{2a}$$

Die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung muß zwei Integrationskonstanten enthalten, welche durch die Randbedingungen bestimmt werden. Bei dem vorliegenden Problem muß $dz/du = 0$ an der Stelle $u = 0$ und $z = 0$ an den Stellen $u = \pm\, l$ sein. Da die gesuchte Funktion z eine gerade Funktion bezüglich der Stelle $u = 0$ sein muß, wird der Ansatz

$$z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_{2n}\, u^{2n} \tag{3}$$

auf die Lösung von Gleichung (2a) führen. Die Randbedingung $dz/du = 0$ bei $u = 0$ ist mit beliebigen α_{2n} $(n = 0, 1, \ldots)$ erfüllt; aus diesem Grund wird also in (3) nur noch eine Integrationskonstante enthalten sein. Durch Einsetzen von (3) in (2a) findet man für die α_{2n} das System

$$\left.\begin{aligned}
1\cdot 2\,\alpha_2 - \frac{2\,P\,b}{E\,J_0\,r_0}\,\alpha_0 &= -\,\frac{P\,b}{E\,J_0\,2}\,,\\
3\cdot 4\,\alpha_4 - \frac{2\,P\,b}{E\,J_0\,r_0}\,\alpha_2 + \frac{2\,P}{E\,J_0\,l\,r_0}\,\alpha_0 &= \frac{P}{E\,J_0\,2\,l}\,,\\
5\cdot 6\,\alpha_6 - \frac{2\,P\,b}{E\,J_0\,r_0}\,\alpha_4 + \frac{2\,P}{E\,J_0\,l\,r_0}\,\alpha_2 &= 0\,,\\
7\cdot 8\,\alpha_8 - \frac{2\,P\,b}{E\,J_0\,r_0}\,\alpha_6 + \frac{2\,P}{E\,J_0\,l\,r_0}\,\alpha_4 &= 0\,,\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei $2\,a + l = b$ gesetzt ist. Die Koeffizienten α_{2n} lassen sich also rekursiv in Abhängigkeit von α_0 berechnen, und die Konstante α_0 übernimmt demnach die Rolle der noch zu bestimmenden Integrationskonstanten, welche dann durch die Randbedingung

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n}\, l^{2n} \tag{5}$$

festgelegt ist. Die maximale Abweichung z_{max} von der Zylinderform liefert Gleichung (3) mit $u = 0$

$$z_{max} = e = \alpha_0\,.$$

Die Rechnung gestaltet sich übersichtlich, wenn die Substitution

$$f = \frac{5}{24}\,\frac{P\,l^3}{E\,J_0}$$

durchgeführt wird. Es ist f der Biegepfeil eines eingespannten Trägers von der Länge l, der Biegesteifigkeit $E J_0$, belastet durch die Endkraft P und die Streckenlast $p = P/l$ (Abb. 6). Die Gleichungen (4) können nun auch in der Form

$$\left.\begin{aligned}
1 \cdot 2\, \alpha_2 l^2 - \frac{48}{5}\frac{f}{r_0}\frac{b}{l}\alpha_0 &= -\frac{12}{5}\frac{b}{l}f, \\
3 \cdot 4\, \alpha_4 l^4 - \frac{48}{5}\frac{f}{r_0}\frac{b}{l}\alpha_2 l^2 + \frac{48}{5}\frac{f}{r_0}\alpha_0 &= \frac{12}{5}f, \\
5 \cdot 6\, \alpha_6 l^6 - \frac{48}{5}\frac{f}{r_0}\frac{b}{l}\alpha_4 l^4 + \frac{48}{5}\frac{f}{r_0}\alpha_2 l^2 &= 0, \\
7 \cdot 8\, \alpha_8 l^8 - \frac{48}{5}\frac{f}{r_0}\frac{b}{l}\alpha_6 l^6 + \frac{48}{5}\frac{f}{r_0}\alpha_4 l^4 &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

angegeben werden.

Eine praktische Auswertung wird sich nun so gestalten, daß man zunächst einmal annimmt, die Kontur der Walze werde durch die Parabel

$$z_1 = \alpha_{01} + \alpha_{21} u^2$$

hinreichend genau beschrieben, also alle α_{2n} $(n = 2, 3, \ldots)$ wären Null. Die Erste der Gleichungen (4a) liefert dann

$$\alpha_{21} l^2 = \frac{6}{5}\frac{b}{l}\left(4\frac{f}{r_0}\alpha_{01} - f\right)$$

und (5) damit

$$z_{max\,1} = e_1 = \alpha_{01} = \frac{\frac{6}{5}\frac{b}{l}f}{\left(1 + \frac{24}{5}\frac{b}{l}\frac{f}{r_0}\right)}.$$

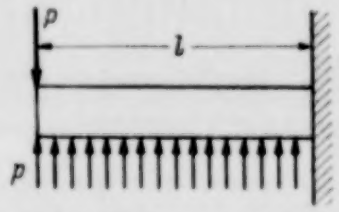

Abb. 6. Zur Veranschaulichung der gewählten Substitution f.

Betrachtet man diesen Wert e_1 als einen ersten Näherungswert, so wird man zu einer zweiten Näherung kommen, wenn von Ansatz (3)

$$z_2 = \alpha_{02} + \alpha_{22} u^2 + \alpha_{42} u^4 \qquad (6)$$

als Approximationsfunktion unterteilt wird. Die Zweite der Gleichungen (4a) liefert

$$\alpha_{42} l^4 = \frac{1}{5}\left[\frac{24}{5}\left(\frac{b}{l}\right)^2\frac{f}{r_0} - 1\right]\left(4\frac{f}{r_0}\alpha_{02} - f\right),$$

und aus (5) folgt

$$z_{max\,2} = e_2 = \alpha_{02} = \frac{\frac{1}{5}\left[\left(6\frac{b}{l} - 1\right) + \frac{24}{5}\left(\frac{b}{l}\right)^2\frac{f}{r_0}\right]f}{\left[1 + \frac{4}{5}\left(6\frac{b}{l} - 1\right)\frac{f}{r_0} + \frac{96}{25}\left(\frac{b}{l}\right)^2\left(\frac{f}{r_0}\right)^2\right]}.$$

Schließlich sei noch für den Ansatz

$$z_3 = \alpha_{03} + \alpha_{23} u^2 + \alpha_{43} u^4 + \alpha_{63} u^6 \qquad (6a)$$

der nächste Term aus der Dritten der Gleichungen (4a)

$$\alpha_{63} l^6 = \frac{8}{125}\frac{b}{l}\frac{f}{r_0}\left[\frac{24}{5}\left(\frac{b}{l}\right)^2\frac{f}{r_0} - 7\right]\left(4\frac{f}{r_0}\alpha_{03} - f\right)$$

angegeben, mit dem der Näherungswert

$$z_{max\,3} = e_3 = \alpha_{03} = \frac{\frac{1}{5}\left[\left(6\frac{b}{l} - 1\right) + \frac{8}{25}\frac{b}{l}\left(15\frac{b}{l} - 7\right)\frac{f}{r_0} + \frac{192}{125}\left(\frac{b}{l}\right)^3\left(\frac{f}{r_0}\right)^2\right]f}{\left[1 + \frac{4}{5}\left(6\frac{b}{l} - 1\right)\frac{f}{r_0} + \frac{32}{125}\frac{b}{l}\left(15\frac{b}{l} - 7\right)\left(\frac{f}{r_0}\right)^2 + \frac{768}{625}\left(\frac{b}{l}\right)^3\left(\frac{f}{r_0}\right)^3\right]}$$

erreicht wird.

Es liegt in der Art der Problemstellung und der hier angewandten Lösungsmethode begründet, daß die Folge $(\alpha_{0m} - e)$ eine Nullfolge ist, also $\lim_{m \to \infty} \alpha_{0m} = e$ gilt. Die Folge der α_{0m} konvergiert sehr rasch gegen den gesuchten Grenzwert e, wie eine Betrachtung der oben angegebenen Werte e_1, e_2 und e_3 zeigt. Faßt man die e_i $(i = 1, 2, \ldots)$ als Funktionen des Quotienten f/r_0 auf, der als

außerordentlich klein anzusehen ist, so stimmen e_2 und e_3 in den konstanten Gliedern bereits überein. Obwohl eine Berücksichtigung selbst noch des in f/r_0 linearen Gliedes überflüssig scheint, soll die *linearisierte* Form von e_3 angegeben werden, welche dann als eine den praktischen Anforderungen ausreichende exakte Richtformel bezeichnet werden kann. Es ist also

$$e \approx \frac{1}{5}\left[\left(6\frac{b}{l}-1\right)+\frac{f}{r_0}\left(-\frac{4}{5}+\frac{184}{25}\frac{b}{l}-24\frac{b^2}{l^2}\right)\right]f. \tag{7}$$

Aber auch ein anderer Gedankengang läßt die schnelle Konvergenz der α_{0m} erkennen und beweist damit die Brauchbarkeit der entwickelten Methode. Eine Näherungslösung für die gesuchte Kontur der Walze liefert nämlich schon die elementarste Biegelehre. Abb. 7 zeigt einen eingespannten Träger von der Länge l, belastet durch die Endkraft P, das Endmoment $P\,a$ und die Streckenlast $p = P/l$. Der Querschnitt des Trägers sei konstant und damit auch die Biegesteifigkeit $E\,J = E\,J_0$. Unter Einfluß der Belastungen wird der Träger sich durchbiegen. Der Endquerschnitt senkt sich dabei um die Strecke

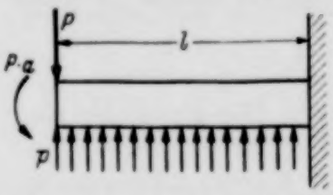

Abb. 7. Erste Näherung durch Ersatzträger mit Einzellast, Streckenlast und Endmoment.

$$f_0 = \left(6\frac{b}{l}-1\right)\frac{P\,l^3}{24\,E\,J_0} = \frac{1}{5}\left(6\frac{b}{l}-1\right)f.$$

Dieser Biegepfeil kann als Näherungswert für e angesehen werden, so daß dann aber auch für die Kontur die Funktion

$$z = f_0 - y$$

als Näherung gilt, wobei y die Biegelinie des Trägers (Abb. 7) ist. Da e eine Größenordnung von nur einigen hundertstel Millimetern besitzt, praktisch eine zylindrische Walze vorliegt, ist die Annahme, mit konstantem Querschnitt zu rechnen, zutreffend. Man könnte nun fortfahren und von der so gefundenen ersten Kontur mit einem zweiten Iterationsschritt eine noch genauere Funktion für die Walzenkontur herleiten, doch müßte in diesem zweiten Rechnungsgang bereits die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes J berücksichtigt werden.

Allgemeiner ist es über die Differentialgleichung für die Kontur der Walze

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M}{E\,J} \tag{8}$$

mit

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_0}\left(1-4\frac{z}{r_0}\right)$$

für kleine z/r_0 möglich, ein Iterationsverfahren anzugeben, welches direkt von der Gleichung (8) ausgeht und die Form hat

$$\frac{d^2z_n}{dx^2} = -\frac{M}{E\,J_{n-1}}$$

oder

$$\frac{d^2z_n}{dx^2} = -\frac{P\left(a+x-\frac{x^2}{2\,l}\right)}{E\,J_0}\left(1-4\frac{z_{n-1}}{r_0}\right), \tag{9}$$

wobei

$$\frac{1}{J_{n-1}} = \frac{1}{J_0}\left(1-4\frac{z_{n-1}}{r_0}\right)$$

gesetzt ist und unter M das schon oben angegebene innere Biegungsmoment an der Stelle x der Walze zu verstehen ist. Die z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ genügen den Randbedingungen $z_n(0) = 0$ und $z_n'(l) = 0$. Der erste Schritt der Iteration wird mit $z_0 = 0$ ausgeführt, so daß (9) die Form hat

$$\frac{dz_1^2}{dx^2} = -\frac{P\left(a+x-\frac{x^2}{2\,l}\right)}{E\,J_0}.$$

Man erhält den Wert

$$z_1 = \frac{P}{24\,E\,J_0}\frac{x^4}{l} - \frac{P}{6\,E\,J_0}x^3 - \frac{P}{2\,E\,J_0}a\,x^2 + \frac{P}{E\,J_0}l\left(a+\frac{l}{3}\right)x, \tag{10}$$

welcher mit $x = l$ auf den Näherungswert

$$e \approx f_0 = \frac{P l^3}{24 E J_0}\left(6\frac{b}{l} - 1\right)$$

führt, der schon angegeben wurde.

Der zweiten Iteration liegt die Gleichung

$$\frac{d^2 z_2}{dx^2} = -\frac{P\left(a + x - \frac{x^2}{2l}\right)}{E J_0}\left(1 - 4\frac{z_1}{r_0}\right)$$

zu Grunde mit z_1 aus (10); doch ist die Ermittlung von z_2 schon so umständlich, daß hier die Rechnung bereits abgebrochen werden soll. Der Rechnungsgang verliert an Übersichtlichkeit.

Wenn größere Genauigkeit gefordert wird, ist das oben dargelegte Verfahren vorzuziehen. Ein Vergleich der $\alpha_{0\,m}$ mit f_0 zeigt, daß in α_{02} und α_{03} die konstanten Glieder bereits mit f_0 übereinstimmen, und dies ist ein Anhaltspunkt für die Genauigkeit der abgeleiteten Formel (7) für e.

Es steht im Ermessen des Rechners, das Verfahren noch so zu verallgemeinern, daß der Ausdruck für das Trägheitsmoment l/J um weitere Potenzen von z erweitert, so daß also

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_0}\left(1 - 4\frac{z}{r_0} + 6\frac{z^2}{r_0^2} - \cdots\right)$$

gesetzt wird. Dies wäre zwar nur für Walzen mit stärkerer Krümmung in der Meridianebene erforderlich, eine Erweiterung der Theorie also, welche sich für das vorgelegte zu lösende Problem nicht lohnt. Eine Folge davon wäre auch, daß die Gleichungen (4) bzw. (4a) dann komplizierteren Bildungsgesetzen genügen.

3. Zahlenbeispiel. Ein Zahlenbeispiel mag die Verhältnisse noch erhellen. Es sei $l = 45$ cm, $a = 12$ cm, $r_0 = 14$ cm, $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ kg/cm² und $P = 3000$ kg. Mit $J_0 = 3{,}02 \cdot 10^4$ cm⁴ ist dann $f = 8{,}6 \cdot 10^{-3}$ mm und $f_0 = 1{,}41 \cdot 10^{-2}$ mm. Für den Quotienten f/r_0 erhält man $f/r_0 = 6{,}14 \cdot 10^{-5}$, und Formel (7) liefert $e = 1{,}409 \cdot 10^{-2}$ mm. Der Unterschied von e und f_0 ist also bereits so gering, daß er mit Rechenschiebergenauigkeit gerade noch feststellbar ist. Die Gleichung der Kontur wäre dann nach (6) oder (6a) hinreichend genau beschrieben.

4. Zusammenfassung. Es werden im Wesentlichen zwei Verfahren zur Ermittlung der Walzenkontur angegeben. Während das erste Verfahren darauf beruht, daß von vornherein in der Differentialgleichung der elastischen Linie der Walze eine Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes J berücksichtigt wird, entwickelt sich der Rechnungsgang übersichtlich und so, daß praktisch bis zu jeder gewünschten Genauigkeit die notwendige Abweichung von der zylindrischen Form der Walze ermittelt werden kann. Das zweite Verfahren verliert mit den ersten Iterationsschritten bereits an Übersichtlichkeit und wird deshalb nicht weiter entwickelt. Es werden jedoch Vergleiche gezogen, die beweisen, daß beide Verfahren sehr rasch konvergieren.

Aus dem Lehrstuhl und Institut für Technische Mechanik (Prof. Dr.-Ing. *Rudolf Sonntag*) Karlsruhe.

(Eingegangen am 22. November 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Werner Roth*, Karlsruhe, Kaiserstr. 12, Institut f. Techn. Mechanik.

Beitrag zur Theorie ebener Fachwerke

Von **H. Baldauf**

1. Einleitung. Die übliche Theorie zur Berechnung der Stabkräfte in Fachwerken geht u. a. von der Voraussetzung aus, daß die Stäbe in den Knoten durch reibungsfreie Gelenke mit einander verbunden sind, und daß die Lasteintragung nur in den Knoten erfolgt. Unter dieser Voraussetzung erhalten die Fachwerkstäbe nur Normalkräfte. Dabei wird vernachlässigt, daß die Stäbe in den Knoten biegesteif miteinander verbunden werden und durch ihr Eigengewicht Belastungen senkrecht zur Stabachse erhalten. Dadurch treten in Fachwerkstäben stets Biegemomente auf, die im allgemeinen zu kleinen Zusatzspannungen führen und als Nebenspannungen bezeichnet werden. Die exakte Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit und der Biegesteifigkeit von Fachwerkstäben führt bei Anwendung der Kraftgrößenmethode auf einen hohen Grad statischer Unbestimmtheit, so daß man sich zur Berechnung der Nebenspannungen meist mit Näherungslösungen begnügt[1]. Kennzeichnend ist dabei, daß zunächst die Berechnung in der üblichen Form (*Cremona*-Plan, *Ritter*sches Schnittverfahren) durchgeführt wird, und daß die Nebenspannungen in einem zweiten Rechnungsgang bestimmt werden. Bei dem zweiten Rechnungsgang wird meist nur die Biegesteifigkeit der Stäbe berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren beschrieben, das in Anlehnung an das Reduktionsverfahren[2] gestattet, die Schnittkräfte eines Fachwerkes unter Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit und der Biegesteifigkeit in einem Rechnungsgang zu bestimmen.

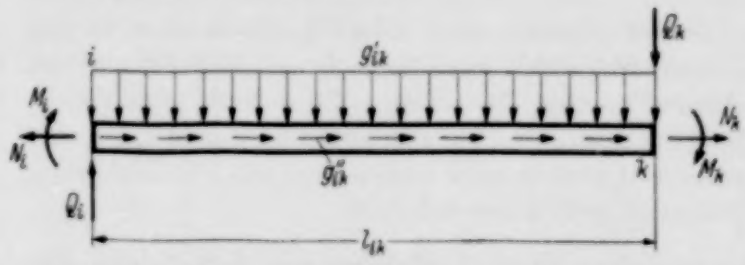

Abb. 1. Definition der Belastung und der Randschnittkräfte eines Fachwerkstabes.

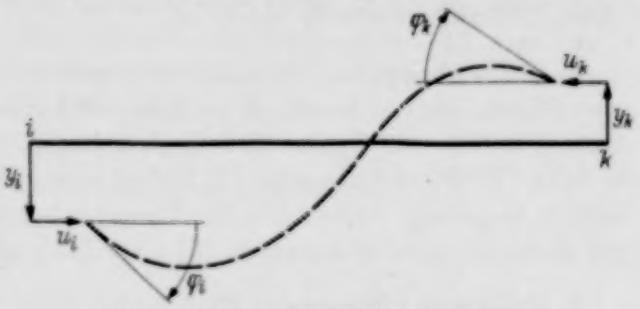

Abb. 2. Definition der Randverformungen eines Fachwerkstabes.

2. Grundlegende Beziehungen am Stab und an den Knoten. Es werden folgende Voraussetzungen getroffen: Die Theorie erster Ordnung ist anwendbar. Das *Hooke*sche Gesetz ist gültig. Die Abmessungen der Knotenscheiben sind klein gegenüber den Stablängen, so daß die Stablängen gleich den Netzlängen des Fachwerksystems gesetzt werden können. Das Trägheitsmoment J_{ik}, die Fläche F_{ik} und das Eigengewicht g_{ik} eines Stabes ist zwischen zwei Knoten i und k konstant, ebenso der Elastizitätsmodul E. Zwischen den Schnittkräften (Abb. 1) und Formänderungen (Abb. 2) an den Stabenden i und k bestehen dann folgende Beziehungen (s. auch Abb. 3):

$$\begin{pmatrix} y_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ Q_k \\ u_k \\ N_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -l_{ik} & +\frac{1}{EJ_{ik}}\frac{l_{ik}^3}{2} & +\frac{1}{EJ_{ik}}\frac{l_{ik}^3}{6} & 0 & 0 & -\frac{g'_{ik}}{EJ_{ik}}\frac{l_{ik}^4}{24} \\ 0 & +1 & -\frac{1}{EJ_{ik}}l_{ik} & -\frac{1}{EJ_{ik}}\frac{l_{ik}^3}{2} & 0 & 0 & +\frac{g'_{ik}}{EJ_{ik}}\frac{l_{ik}^3}{6} \\ 0 & 0 & -1 & -l_{ik} & 0 & 0 & +g'_{ik}\frac{l_{ik}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -g'_{ik}\,l_{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{EF_{ik}}l_{ik} & +\frac{g''_{ik}}{EF_{ik}}\frac{l_{ik}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -g''_{ik}\,l_{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ Q_i \\ u_i \\ N_i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

[1] F. *Hartmann*, Stahlbrücken (Der Brückenbau 3. Band), Wien 1951, S. 601.
[2] S. *Falk*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 216.

oder kurz

$$\eta_k = \mathfrak{L}_{ik}\,\eta_i\,. \tag{1a}$$

Die von der üblichen Form abweichende Definition der Formänderungen an den Stabenden ist im Hinblick auf die Transformation der geometrischen Randbedingungen an den Knoten (10) zweckmäßig. Außerdem ist bei dieser Definition vorteilhaft, daß bei der Umkehrung der Berechnung

$$\eta_i = \mathfrak{L}_{ki}\,\eta_k \tag{1b}$$

die Matrix $\mathfrak{L}_{ki}$ mit Ausnahme der von der Belastung g_{ik} abhängigen Glieder mit der Matrix $\mathfrak{L}_{ik}$ übereinstimmt:

$$\mathfrak{L}_{ki} = \mathfrak{L}_{ik} \quad \text{für} \quad g_{ik} = 0\,. \tag{1c}$$

Die von der Belastung g_{ik} abhängigen Glieder ändern bei der Umkehrung der Berechnung ihr Vorzeichen (Abb. 3).

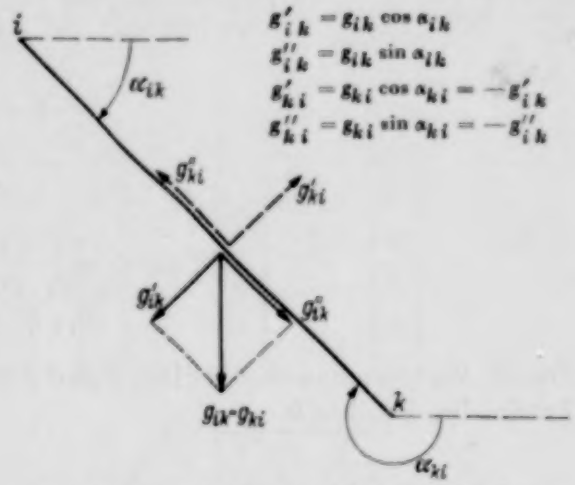

Abb. 3. Zerlegung des Eigengewichtes in die Lastkomponenten parallel und senkrecht zur Stabachse.

Für die Zahlenrechnung empfiehlt es sich, mit dimensionslosen Zahlen zu rechnen. Auf Grund der folgenden Beziehungen (2) wird die Matrix (1) umgerechnet.

$$\left.\begin{aligned} y &= y^*\frac{P_e l_e^3}{E J_e}, \qquad \varphi = \varphi^*\frac{P_e l_e^2}{E J_e}, \qquad u = u^*\frac{P_e l_e^3}{E J_e},\\ M &= M^* P_e l_e, \qquad Q = Q^* P_e, \qquad N = N^* P_e,\\ g &= g^*\frac{P_e}{l_e}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dabei bedeuten P_e, l_e und J_e beliebig wählbare Kraft, Länge und Trägheitsmoment. Zweckmäßig werden sie so ausgewählt, daß die Verhältnisse J_e/J_{ik} und l_{ik}/l_e möglichst gleich 1 werden oder nahe bei 1 liegen. Wird (2) in (1) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} y_k^* \\ \varphi_k^* \\ M_k^* \\ Q_k^* \\ u_k^* \\ N_k^* \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{l_{ik}}{l_e} & +\frac{1}{2}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^2 & +\frac{1}{6}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^3 & 0 & 0 & +\tilde{y}_{ik}^* \\ 0 & +1 & -\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right) & -\frac{1}{2}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^2 & 0 & 0 & +\tilde{\varphi}_{ik}^* \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{l_{ik}}{l_e} & 0 & 0 & +\tilde{M}_{ik}^* \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +\tilde{Q}_{ik}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{J_e}{F_{ik} l_e^2}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right) & +\tilde{u}_{ik}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +\tilde{N}_{ik}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i^* \\ \varphi_i^* \\ M_i^* \\ Q_i^* \\ u_i^* \\ N_i^* \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dabei bedeuten (Abb. 3)

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_{ik}^* &= -\frac{g_{ik}'^*}{24}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^4, & \tilde{\varphi}_{ik}^* &= +\frac{g_{ik}'^*}{6}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^3,\\ \tilde{M}_{ik}^* &= +\frac{g_{ik}'^*}{2}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^2, & \tilde{Q}_{ik}^* &= -g_{ik}'^*\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right),\\ \tilde{u}_{ik}^* &= +\frac{g_{ik}''^*}{2}\frac{J_e}{F_{ik} l_e^2}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^2, & \tilde{N}_{ik}^* &= -g_{ik}''^*\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sind an einem Stab die geometrischen Randbedingungen an den Enden i und k vorgeschrieben, so sind damit die Randschnittkräfte nach (3) bekannt. Die Matrix zerfällt in zwei Teile

$$\begin{pmatrix} y_k^* \\ \varphi_k^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right) & +\frac{1}{2}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^2 & +\frac{1}{6}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^3 & +\tilde{y}_{ik}^* \\ 0 & +1 & -\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right) & -\frac{1}{2}\frac{J_e}{J_{ik}}\left(\frac{l_{ik}}{l_e}\right)^2 & +\tilde{\varphi}_{ik}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i^* \\ \varphi_i^* \\ M_i^* \\ Q_i^* \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

und

$$(u_k^*) = \begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{J_c}{F_{ik}\,l_c^2}\left(\dfrac{l_{ik}}{l_c}\right) & +\tilde{u}_{ik}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^* \\ N_i^* \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Daraus folgen die Randkräfte im Punkt i

$$\left.\begin{aligned} M_i^* &= \frac{3\,(y_i^* + y_k^*) + \dfrac{l_{ik}}{l_c}(2\,\varphi^* + \varphi_k^*)}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{J_c}{J_{ik}}\left(\dfrac{l_{ik}}{l_c}\right)^2} - \frac{1}{12}\,g'^*_{ik}\left(\frac{l_{ik}}{l_c}\right)^2, \\ Q_i^* &= -\frac{2\,(y_i^* + y_k^*) + \dfrac{l_{ik}}{l_c}(\varphi_i^* + \varphi_k^*)}{\dfrac{1}{6}\,\dfrac{J_c}{J_{ik}}\left(\dfrac{l_{ik}}{l_c}\right)^3} + \frac{g'^*_{ik}}{2}\left(\frac{l_{ik}}{l_c}\right), \\ N_i^* &= -\frac{u_i^* + u_k^*}{\dfrac{J_c}{F_{ik}\,l_c^2}\left(\dfrac{l_{ik}}{l_c}\right)} + \frac{g''^*_{ik}}{2}\left(\frac{l_{ik}}{l_c}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Durch Vertauschen der Indices i und k erhält man die entsprechenden Ausdrücke für die Schnittkräfte im Punkte k.

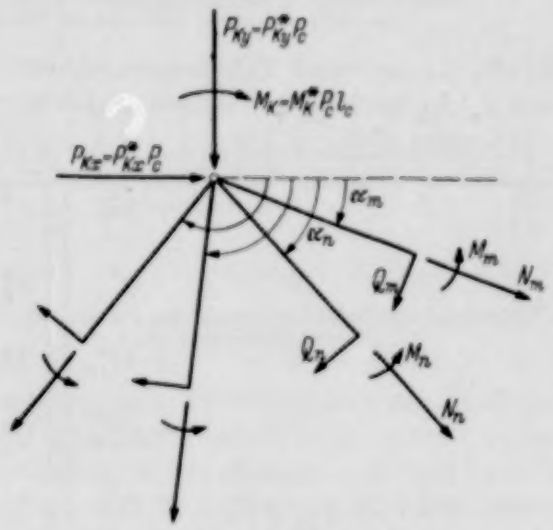

Abb. 4. Belastung und Randschnittkräfte am Knoten K.

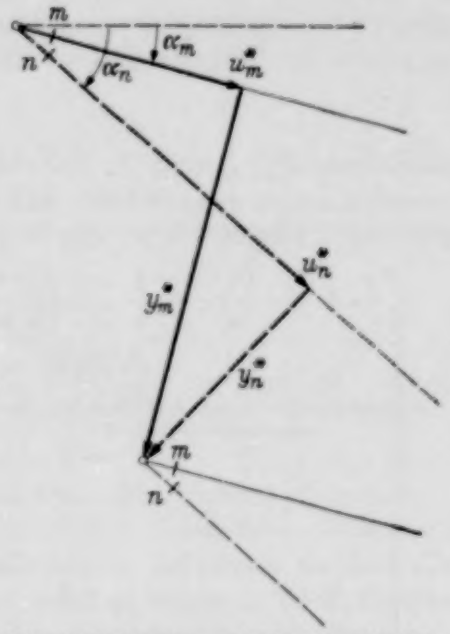

Abb. 5. Beziehungen zwischen den Verschiebungen zweier Stabenden an einem Knoten.

Die Gleichgewichtsbedingungen an einem Knoten K lauten (Abb. 4)

$$\left.\begin{aligned} P_{Kx} + \sum_K N_n \cos\alpha_n - \sum_K Q_n \sin\alpha_n &= 0\,, \\ P_{Ky} + \sum_K N_n \sin\alpha_n + \sum_K Q_n \cos\alpha_n &= 0\,, \\ -M_K + \sum_K M_n &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Sind an einem Knoten alle Stabendkräfte mit Ausnahme der Kräfte am Stabende m bekannt, so ergeben sich diese Randschnittkräfte aus (8):

$$\begin{pmatrix} Q_m^* \\ N_m^* \\ M_m^* \end{pmatrix} = -\sum_{\substack{K \\ n \neq m}} \begin{pmatrix} +\cos(\alpha_n - \alpha_m) & +\sin(\alpha_n - \alpha_m) & 0 \\ -\sin(\alpha_n - \alpha_m) & +\cos(\alpha_n - \alpha_m) & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_n^* \\ N_n^* \\ M_n^* \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} +\cos\alpha_m & -\sin\alpha_m & 0 \\ +\sin\alpha_m & +\cos\alpha_m & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^*_{Ky} \\ P^*_{Kx} \\ M_K^* \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Die senkrechte und waagerechte Verschiebung und die Verdrehung eines Knotens ist bestimmend für die geometrischen Randbedingungen aller Stäbe, die in diesem Knoten angeschlossen sind. An einem Knoten bestehen zwischen den geometrischen Randbedingungen der Stabenden n und m folgende Beziehungen (Abb. 5):

$$\begin{pmatrix} y_m^* \\ u_m^* \\ \varphi_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(\alpha_n - \alpha_m) & +\sin(\alpha_n - \alpha_m) & 0 \\ -\sin(\alpha_n - \alpha_m) & +\cos(\alpha_n - \alpha_m) & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n^* \\ u_n^* \\ \varphi_n^* \end{pmatrix}. \tag{10}$$

3. Rechnungsgang. Bei einem zweistäbigen Knoten (Abb. 6 Knoten A) wird an einem Stabende (Stabende 0) der Vektor η_0 mit den unbekannten Komponenten y_0^*, φ_0^*, M_0^*, Q_0^*, u_0^*, N_0^* angenommen:

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} y_0^* \\ \varphi_0^* \\ M_0^* \\ Q_0^* \\ u_0^* \\ N_0^* \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_0^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_0^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} M_0^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Q_0^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_0^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} N_0^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 . \tag{11}$$

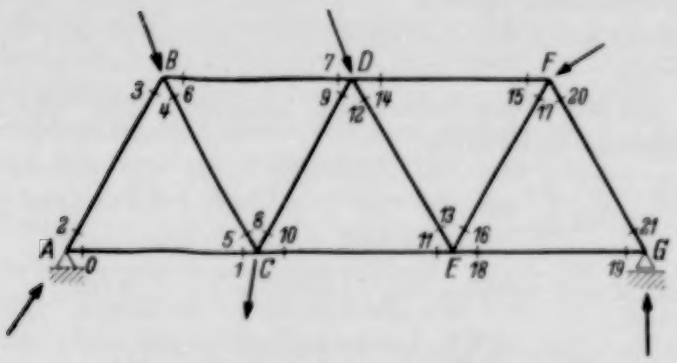

Abb. 6. Bezeichnung der Knoten und Stabenden.

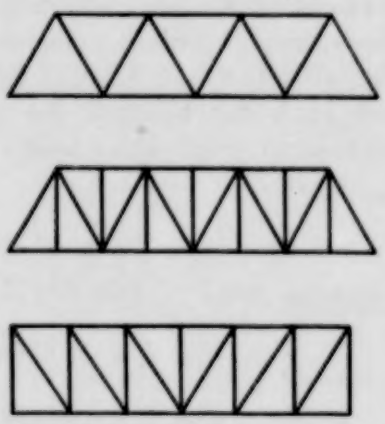

Abb. 8. Streben- und Pfostenfachwerke.

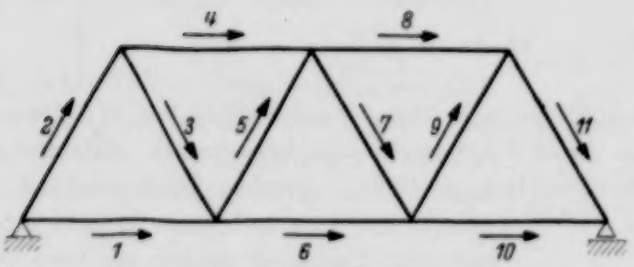

Abb. 7. Reihenfolge des Rechnungsganges.

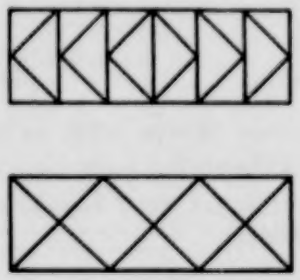

Abb. 9. K-Fachwerk und Rautenfachwerk.

Mit Hilfe von (3) wird der Vektor η_1 in Abhängigkeit der unbekannten Komponenten berechnet[1]. Auf Grund der Gleichgewichtsbedingung (9) und der Kontinuitätsbedingung (10) wird am Knoten A der Vektor η_2 bestimmt und darauf mit (3) der Vektor η_3. Mit der Kenntnis von η_3 und η_1 liegen über (10) die geometrischen Randbedingungen für den Stab $\overline{45}$ fest, so daß mit (7) die Randschnittkräfte am Stabende 4 berechnet werden können und anschließend mit (3) die Schnittkräfte am Stabende 5. Am Knoten B kann nunmehr auf Grund der Gleichgewichtsbedingung (9) und Kontinuitätsbedingung (10) mit η_3 und η_4 der Vektor η_6 bestimmt werden, anschließend mit (3) der Vektor η_7. Damit liegen die geometrischen Randbedingungen des Knotens D fest, so daß sich nunmehr die Schnittkräfte des Stabes $\overline{89}$ nach (7) berechnen lassen. Dieser Rechnungsgang wird sinngemäß fortgesetzt. In Abb. 7 ist die Reihenfolge der Rechnungen angegeben. Schließlich ergeben sich die Vektoren η_{19} und η_{21}, die die Bedingungen (9) und (10) erfüllen müssen. Dadurch erhält man 6 Bedingungsgleichungen für die 6 unbe-

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 338.

kannten Anfangswerte. Sind die Stützkräfte unbekannt (statisch unbestimmt gestützte Fachwerke), so treten noch t unbekannte Stützkräfte hinzu, denen aber t geometrische Stützenbedingungen gegenüber stehen. Insgesamt sind also zur Berechnung der $6 + t$ unbekannten Komponenten $6 + t$ Bedingungsgleichungen verfügbar.

Im betrachteten Beispiel (Abb. 6) sind die folgenden Stützenbedingungen vorgeschrieben:

$$y_0^* = 0\,, \qquad u_0^* = 0\,, \qquad y_{19}^* = 0\,.$$

Dadurch enthält der Anfangsvektor nur noch 4 unbekannte Komponenten. Werden die Stützkräfte als bekannt vorausgesetzt (statisch bestimmte Stützung), so sind von den 6 Bedingungen (9) und (10) am Knoten G nur noch 3 voneinander unabhängig. Die vierte unabhängige Bedingung folgt aus der Randbedingung $y_{19}^* = 0$. Bei statisch unbestimmter Stützung gehen die Stützkräfte in den Gleichgewichtsbedingungen (9) als unbekannte Größen ein und sind in der weiteren Rechnung entsprechend mitzuführen.

4. Grenzen der Anwendbarkeit, Erweiterungsmöglichkeiten. Das angegebene Verfahren kann auf Strebenfachwerke mit und ohne Hilfspfosten und auf Pfostenfachwerke (Abb. 8) angewendet werden. Dabei beginnt die Berechnung an einem zweistäbigen Knoten (A bzw. G). Die Anwendung bei K-Fachwerken und Rautenfachwerken (Abb. 9) ist in der beschriebenen Weise nicht möglich.

Die Beschränkung auf konstante Flächen- und Trägheitsmomente und konstante Gewichte der einzelnen Stäbe ist nicht nötig. Die Veränderlichkeit dieser Größen kann ohne weiteres berücksichtigt werden, nur wird die Transformationsmatrix (1) komplizierter, auch ist dann die Beziehung (1c) nicht mehr erfüllt. Ebenfalls kann das Verfahren auf Lastangriff von Einzelkräften zwischen den Knoten erweitert werden.

Soll auch der Einfluß der Längskraft auf die Formänderungen senkrecht zur Stabachse berücksichtigt werden, so muß von der Differentialgleichung

$$E\,J_{ik}\,\frac{d^4y}{dx^4} - N_{ik}\,\frac{d^2y}{dx^2} = g'_{ik} \tag{12}$$

ausgegangen werden, mit den Lösungen (für $J_{ik} = \text{konst.}$, $N_{ik} = \text{konst.}$, $g'_{ik} = \text{konst.}$)

$$\left.\begin{aligned} y &= A + B\,x + C\cos \nu_{ik}\,x + D\sin \nu_{ik}\,x - \frac{g'_{ik}}{2\,N_{ik}}\,x^2 \qquad \text{für} \quad N_{ik} < 0\,, \\ y &= A + B\,x + C\,\mathfrak{Cof}\,\bar{\nu}_{ik}\,x + D\,\mathfrak{Sin}\,\bar{\nu}_{ik}\,x - \frac{g'_{ik}}{2\,N_{ik}}\,x^2 \qquad \text{für} \quad N_{ik} > 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \nu_{ik}^2 &= -\frac{N_{ik}}{E\,J_{ik}}\,, \qquad & \bar{\nu}_{ik}^2 &= +\frac{N_{ik}}{E\,J_{ik}}\,. \end{aligned}\right\}$$

Auf diese Weise wäre es möglich, die Knicksicherheit eines Fachwerkes für Knicken in der Fachwerkebene festzustellen und die Traglast eines Fachwerkes zu berechnen. Allerdings muß hierbei zunächst die Längskraft in den einzelnen Stäben geschätzt werden (*Cremona*plan, *Ritter*scher Schnitt).

5. Zusammenfassung. Es wurde ein Verfahren erläutert, mit dessen Hilfe die exakte Berechnung der Längskräfte, Querkräfte und Momente spezieller Fachwerkssysteme in einem Rechnungsgang durchgeführt werden kann. Auf mögliche Erweiterung zur Traglastberechnung und Stabilitätsberechnung wurde hingewiesen.

(Eingegangen am 26. November 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Heinrich Baldauf*, Dresden A 27, Halbkreisstraße 71.

Ein Beitrag zur Berechnung regelmäßig gegliederter Scheiben*

Von H. Beck

1. Einleitung. Gegliederte Scheiben stellen hochgradig statisch unbestimmte ebene Rahmentragwerke von regelmäßiger Struktur dar. Ihre Berechnung erfordert im Regelfall nach den üblichen Methoden der Rahmenstatik (Kraftgrößenmethode, Formänderungsgrößenmethode) einen erheblichen numerischen Aufwand, und zwar auch dann, wenn man einen iterativen Lösungsweg benutzt.

Der Grundgedanke des im Folgenden abgeleiteten Näherungsverfahrens besteht darin, viele unbekannte statisch überzählige Einzelgrößen zu möglichst wenigen unbekannten Funktionen zusammenzufassen. Anstelle eines linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der vielen Einzelgrößen tritt dann ein Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der wenigen, die Einzelgrößen zusammenfassenden Funktionen. Im günstigsten Fall — der sich bei diesem Verfahren tatsächlich einstellt — reduziert es sich auf eine einzige Differentialgleichung zur Bestimmung einer alle Einzelgrößen festlegenden Funktion. Dieser Gedanke wird durch den regelmäßigen Aufbau der hier zu behandelnden Systeme nahegelegt, der zur Folge hat, daß bei Wahl gleichartiger statisch Überzähliger diese in Abhängigkeit des Ortes durch eine mathematisch „vernünftige" Funktion erfaßbar sind. Die Ergebnisse eines darauf basierenden Rechenverfahrens sind um so besser, je größer die Zahl der durch eine Funktion zu ersetzenden Überzähligen ist, d. h. also, je umfangreicher die übliche Rahmenrechnung würde.

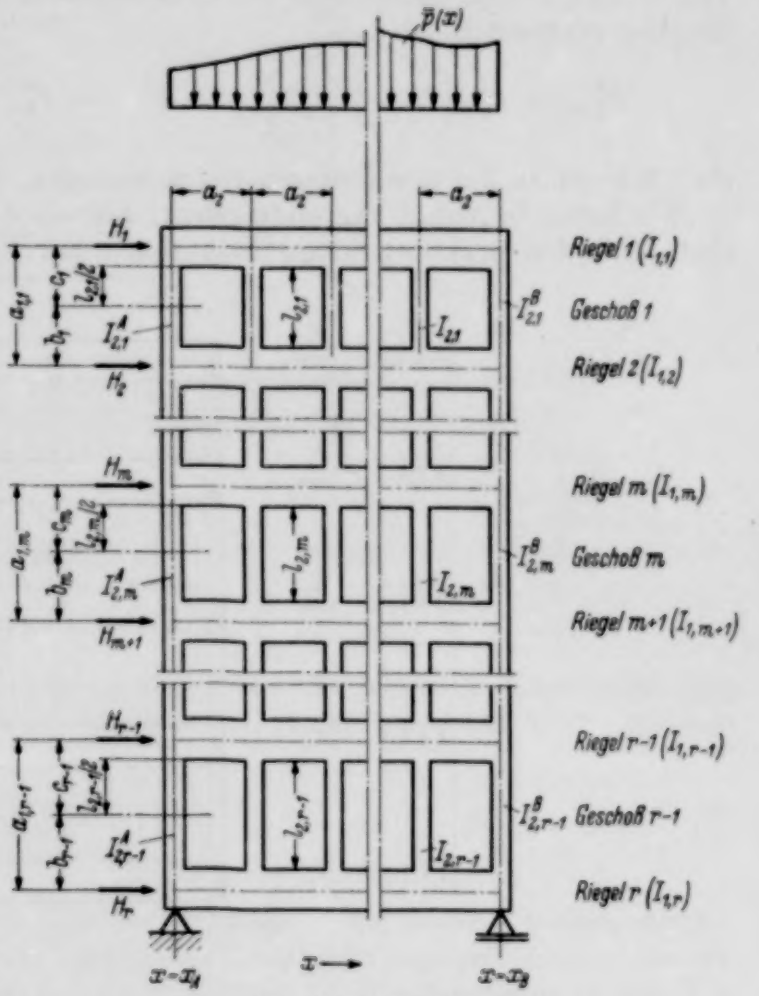

Abb. 1. Systembezeichnungen.

2. Systemstruktur einer gegliederten Scheibe. Ein Beispiel für eine gegliederte Scheibe ist mit den gewählten Bezeichnungen in Abb. 1 dargestellt. Die Riegel sind untereinander parallel und gleichlang, und sie sind in jedem Geschoß mit der gleichen Anzahl gleichabständiger, zu ihnen senkrechter Pfosten verbunden. Das Riegelträgheitsmoment ist für jeden Riegel über x konstant; die einzelnen Riegel können jedoch ein voneinander verschiedenes Trägheitsmoment besitzen. Die Trägheitsmomente der Innenpfosten sind je Geschoß gleich, können aber von Geschoß zu Geschoß verschieden sein. Ferner sei das Verhältnis der Trägheitsmomente von Innen- und Endpfosten für alle Geschosse gleich. Der Systemlinienabstand der Riegel, die lichte Weite zwischen den Riegeln und die relative Lage der Riegelsystemlinien zum lichten Riegelabstand können von Geschoß zu Geschoß variieren. Wir führen eine Numerierung der Riegel und der Geschosse ein, die wir gemäß der Darstellung in Abb. 1 von oben nach unten zählen. Die Gesamtzahl der Riegel nennen wir r. Ein System mit r Riegeln hat stets $r-1$ Geschosse. Die in Abb. 1 und den folgenden Abbildungen gewählten Darstellungen für die Lagerungsbedingungen bedeuten für die Ableitung des Verfahrens keine Spezialisierung.

---

* Auszug Habilitationsschrift Darmstadt 1957; Referent: Professor Dr.-Ing. *A. Mehmel*, Korreferent: Professor Dr. *C. Schmieden*.

3. Struktur des Ersatzsystems. Im Sinne der Mechanik basiert das in seinen Grundgedanken bereits geschilderte Verfahren auf der Annahme eines kontinuierlichen Ersatzsystems für das gegebene diskontinuierliche System. Da die in dem gegebenen diskontinuierlichen System interessierenden mechanischen Größen erst durch die dem System eigene Diskontinuität entstehen, darf das kontinuierliche Ersatzsystem die wesentlichen Diskontinuitätseigenschaften des vorliegenden Systems nicht verletzen. Die im Abstand a_2 vorhandenen Pfosten mit dem Trägheitsmoment $I_{2,m}$ denken wir uns durch kontinuierlich angeordnete Lamellen der Breite dx mit dem Trägheitsmoment $I_{2,m}\,dx/a_2$ ersetzt, die sich unmittelbar gegenseitig nicht an der Verformung hindern. Die Trägheitsmomente $I_{2,m}$ der Innenpfosten sind durch die Lamellenträgheitsmomente vollständig erfaßt. Falls die Trägheitsmomente der Endpfosten eines Systems von $I_{2,m}/2$ verschieden sind (d. h. falls $I^A_{2,m} \neq I_{2,m}/2$ und bzw. oder $I^B_{2,m} \neq I_{2,m}/2$ ist), führen wir im Ersatzsystem noch zusätzliche Ersatzendpfosten mit den Trägheitsmomenten

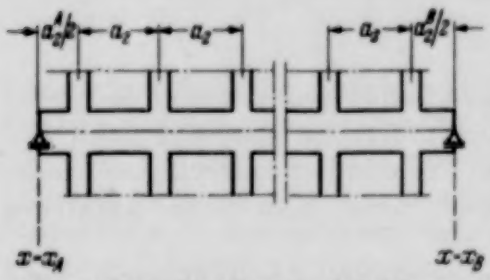

Abb. 2. Systembezeichnungen für nicht am Riegelende angeordnete Außenpfosten.

$$I^A_{E,m} = I^A_{2,m}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{I_{2,m}}{I^A_{2,m}}\right), \qquad I^B_{E,m} = I^B_{2,m}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{I_{2,m}}{I^B_{2,m}}\right), \qquad (1 \leqq m \leqq r-1)\,. \tag{1}$$

ein. Wir setzen bei den weiteren Betrachtungen voraus, daß $I^A_{E,m} \geqq 0$ und $I^B_{E,m} \geqq 0$ ist.

Wir haben in Abb. 1 zugrunde gelegt, daß die Außenpfosten an den Riegelenden angeordnet sind. Für den praktisch kaum vorkommenden Fall, daß die Außenpfosten vom Riegelende

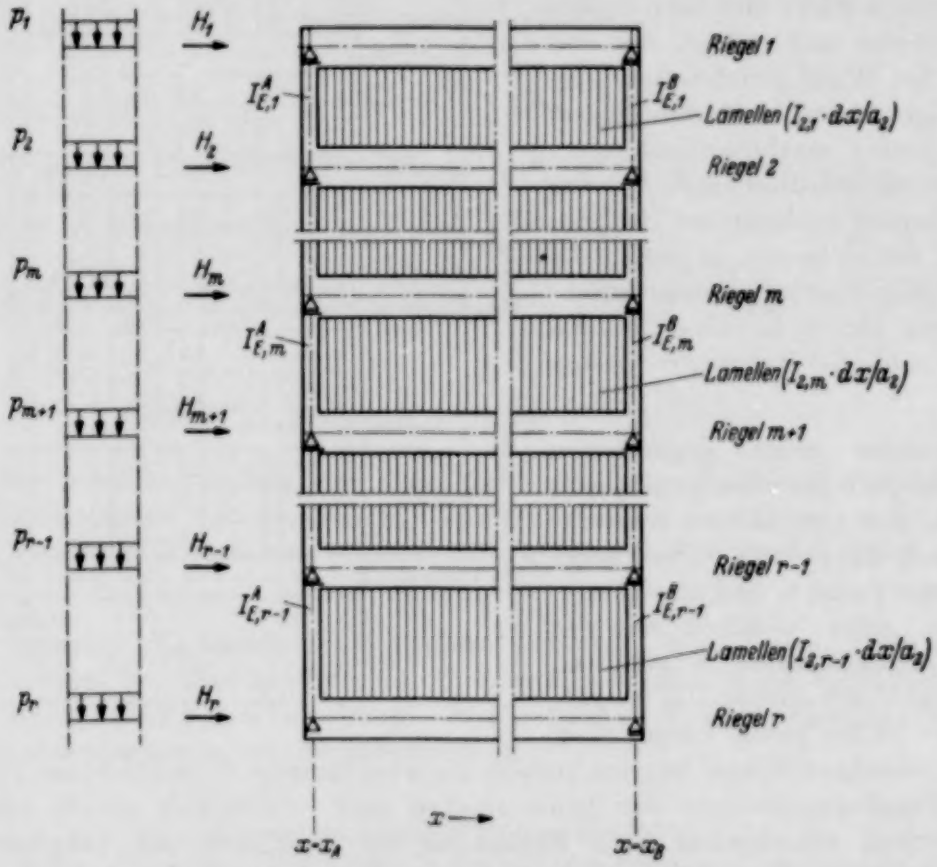

Abb. 3. Ersatzsystem mit Ersatzendpfosten.

einen Abstand $a_2^A/2$ und $a_2^B/2$ haben (Abb. 2), ist den Außenpfosten ein Einzugsgebiet von $(a_2 + a_2^A)/2$ bzw. $(a_2 + a_2^B)/2$ zuzuweisen, so daß sich die Formeln (1) modifizieren zu

$$\left.\begin{aligned} I^A_{E,m} &= \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_2^A}{a_2}\right)\frac{I_{2,m}}{I^A_{2,m}}\right] I^A_{2,m}\,, \\ I^B_{E,m} &= \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_2^B}{a_2}\right)\frac{I_{2,m}}{I^B_{2,m}}\right] I^B_{2,m}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1 \leqq m \leqq r-1)\,. \tag{1'}$$

Das Verhältnis zwischen den Trägheitsmomenten der Endpfosten und der Innenpfosten wird als in allen Geschossen gleich vorausgesetzt:

$$\frac{I^A_{2,m}}{I_{2,m}} = \frac{I^A_{2,\nu}}{I_{2,\nu}}, \qquad \frac{I^B_{2,m}}{I_{2,m}} = \frac{I^B_{2,\nu}}{I_{2,\nu}}, \qquad (1 \leqq m \leqq r-1;\ 1 \leqq \nu \leqq r-1). \tag{2}$$

Dann ist auch das Verhältnis

$$i^A_2 = \frac{I^A_{E,m}}{I_{2,m}} \quad \text{bzw.} \quad i^B_2 = \frac{I^B_{E,m}}{I_{2,m}}, \qquad (1 \leqq m \leqq r-1) \tag{3}$$

in allen Geschossen gleich.

In Abb. 3 ist das dem in Abb. 1 gegebenen System zugehörige Ersatzsystem dargestellt. Die auftretenden Lasten fassen wir in eine senkrecht zu den Riegelachsen wirkende Lastsumme $\bar{p}(x)$ und in r in Richtung der Riegelachsen wirkende Einzelkräfte H_m zusammen (Abb. 1).

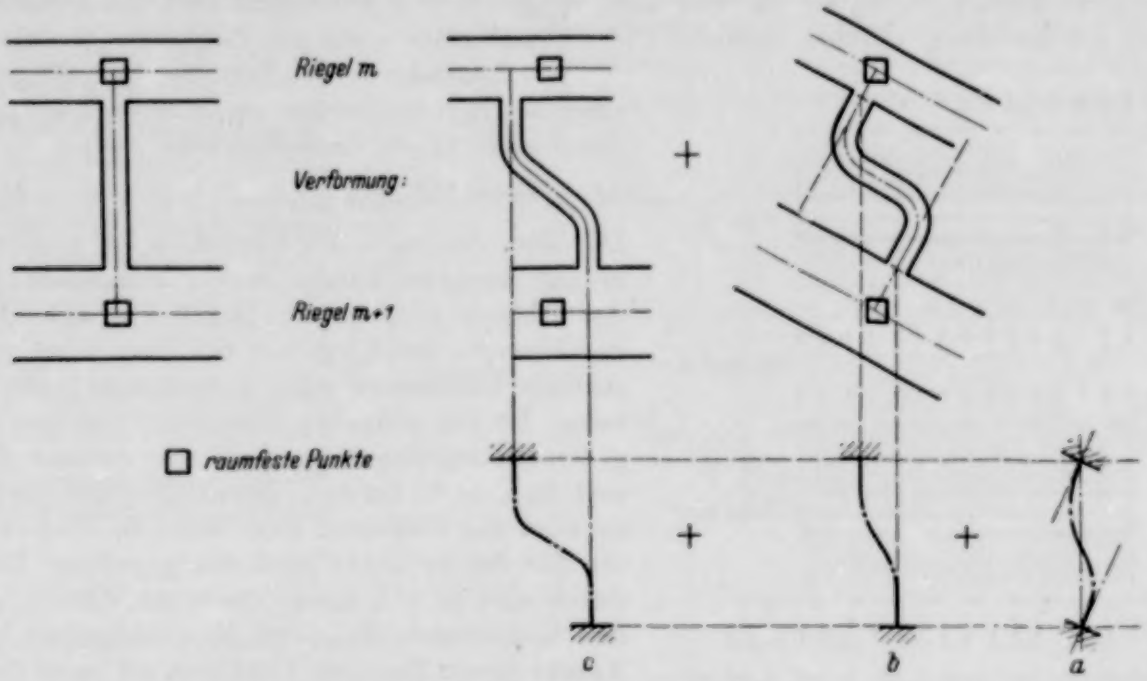

Abb. 4. Verformung einer Lamelle.

Für die rechnerische Belastung des Ersatzsystems teilen wir die gegebene Lastsumme $\bar{p}(x)$ entsprechend den Trägheitsmomenten der Riegel auf diese auf, so daß am Riegel m die senkrecht zu seiner Achse angreifende Last

$$p_m(x) = \bar{p}(x) \frac{I_{1,m}}{\sum_{\nu=1}^{r} I_{1,\nu}} \tag{4}$$

ist. Sie ist in Abb. 3 symbolisch angegeben. Die Regelmäßigkeit im inneren Aufbau des Systems wird auf diese Weise durch die Regelmäßigkeit im Lastangriff ergänzt. Soweit die tatsächlich gegebenen Lasten mit den rechnungsmäßigen Lasten des Ersatzsystems in der Verteilung auf die einzelnen Riegel nicht identisch sind, entstehen in den Lamellen bzw. Pfosten zusätzliche Normalkräfte, die aus einer einfachen Gleichgewichtsbetrachtung folgen und den aus der elastischen Rechnung des Ersatzsystems resultierenden Normalkräften zu superponieren sind. Das gegebene Rahmensystem erleidet Verformungen infolge der Biegemomente, Quer- und Normalkräfte. Wie in der Rahmenrechnung üblich, vernachlässigen wir die Verformungen aus Quer- und Normalkräften. Dieselbe Vernachlässigung soll auch im Ersatzsystem Gültigkeit haben. Infolge der damit zugrunde gelegten Dehnungsstarrheit können wir die oberen Riegel zusätzlich äußerlich gelagert annehmen. Die entstehenden oberen Lagerreaktionen sind dann z. B. für den gegebenen Fall, bei dem nur der unterste Riegel tatsächlich gelagert ist, den ermittelten Endpfostennormalkräften jeweils zuzuzählen. Somit wird die Regelmäßigkeit des inneren Systemaufbaus und des Lastangriffes noch durch die Regelmäßigkeit der äußeren Lagerungsbedingungen vervollständigt.

4. Ableitung des Näherungsverfahrens. Wegen der vorausgesetzten Dehnungsstarrheit der Lamellen sind die senkrecht zur unverformten Riegelachse auftretenden Verformungen (Riegel-

durchbiegungen) aller Riegel gleich. Dies bedeutet für die Lamellen gleiche Endverdrehungen an den Einspannstellen in die Riegel (Abb. 4, a). Es tritt außerdem eine Relativverschiebung der Lamelleneinspannstellen in Achsrichtung der Riegel ein (Abb. 4, b). Bei seitlich verschieblichen Systemen können sich die Riegel auch in Richtung ihrer eigenen Achsen verschieben, so daß auf diese Weise in jedem Geschoß zusätzliche Relativverschiebungen der Lamelleneinspannstellen auftreten (Abb. 4, c). Die Verformungslinien der Lamellen haben für die Verformungsanteile a, b und c in halber lichter Lamellenlänge einen Wendepunkt. Die Lamellen haben also in der Hälfte ihrer Lichtweite einen Momentennullpunkt. Um ein statisch bestimmtes (oder auch statisch unbestimmtes) Grundsystem für unser Ersatzsystem zu erhalten, führen wir in jedem Geschoß in halber lichter Lamellenlänge einen Schnitt. Entlang dieser Schnitte treten als unbekannte Funktionen die Querkräfte und Normalkräfte der Lamellen auf. Wir nennen die unbekannte Querkraftfunktion des m-ten Geschosses $q_m(x)\,dx$ und die unbekannte Normalkraftfunktion des m-ten Geschosses $n_m(x)\,dx$ (Abb. 5). Die Querkräfte des m-ten Geschosses seien positiv, wenn sie an dem zum Riegel $m+1$ gehörigen Lamellenschnittufer in Richtung der positiven x-Achse wirken. Die Normalkräfte seien als Zugkräfte positiv.

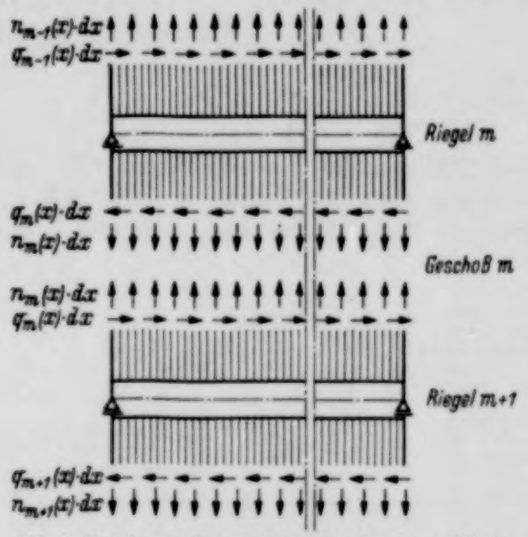

Abb. 5. Unbekannte Funktionen $q_m(x)\cdot dx$ und $n_m(x)\cdot dx$ als positive Größen.

Wir bezeichnen das Moment des Riegels m infolge der ihm zugeordneten äußeren Last $p_m(x)$ bei durchschnittenen Lamellen mit

$$M_{0,m}(x) = M^*_{0,m}(x) + A_{0,m}\cdot(x_B - x) + B_{0,m}\,. \quad (5)$$

Das Riegelmoment des Riegels m sei positiv, wenn es auf der dem Riegel $m+1$ zugewandten Seite des Riegels m Zugspannungen erzeugt. $M^*_{0,m}$ ist das Moment des Riegels m für irgendeine gedachte statisch bestimmte oder unbestimmte Riegellagerung. Ist die gedachte Riegellagerung mit der gegebenen Riegellagerung identisch, so sind $A_{0,m}=0$ und $B_{0,m}=0$. Ist diese Identität nicht vorhanden, so wird die Differenz zwischen den Riegelmomenten für die gedachte und die gegebene Lagerung durch eine in x lineare Funktion erfaßt, die mit den Konstanten $A_{0,m}$ und $B_{0,m}$ festgelegt ist. Der Ansatz dieser linearen Funktion ist nach (5) so gewählt, daß $A_{0,m}$ die lotrechte Lagerreaktion und $B_{0,m}$ das Einspannmoment des Riegels an der Stelle $x=x_B$ infolge des durch $M^*_{0,m}(x)$ nicht erfaßten Anteiles der Riegelmomente aus äußerer Last bedeuten. $A_{0,m}$ und $B_{0,m}$ sind positiv, wenn sie im Riegel m positive Momente erzeugen.

Da in dem gewählten Ersatzsystem die Endtangenten aller Riegel übereinstimmen, müssen die Momentennullpunkte der Ersatzendpfosten wie die der Lamellen in halber lichter Pfostenlänge liegen. Die Endlamelle mit dem Trägheitsmoment $I_{2,m}\,dx/a_2$ hat eine Lamellenquerkraft $q_m(x_A)\,dx$ bzw. $q_m(x_B)\,dx$; es folgt daher aus der Gleichheit der Verformung als Querkraft der Ersatzendpfosten

$$Q^A_{E,m} = a_2\, i_2^A\, q_m(x_A)\,, \qquad Q^B_{E,m} = a_2\, i_2^B\, q_m(x_B)\,. \quad (6)$$

Bei der mathematischen Formulierung geht die Existenz der Ersatzendpfosten in die Randbedingungen ein: am Riegelende $x=x_B$ wirkt auf den Riegel m (Abb. 6) infolge der Querkräfte der Ersatzendpfosten das Moment

$$-[Q^B_{E,m-1}\,b_{m-1} + Q^B_{E,m}\,c_m] \qquad (Q^B_{E,0}=0,\quad Q^B_{E,r}=0) \quad (7a)$$

und am Riegelende $x=x_A$ das Moment

$$+[Q^A_{E,m-1}\,b_{m-1} + Q^A_{E,m}\,c_m] \qquad (Q^A_{E,0}=0,\quad Q^A_{E,r}=0)\,. \quad (7b)$$

Es verhalten sich bei dem unserem Rechenverfahren zugrunde gelegten mechanischen Gedankenmodell (= Ersatzsystem) die Riegelmomente $M_{E,m}$ proportional zu ihren Trägheitsmomenten, d. h. es ist

$$\frac{M_{E,m}(x)}{I_{1,m}} = \frac{M_{E,\nu}(x)}{I_{1,\nu}} \qquad (1 \leqq m \leqq r;\quad 1 \leqq \nu \leqq r)\,. \quad (8)$$

Bei allgemeinen Abmessungsverhältnissen widersprechen sich (7a), (7b) und (8). Da Gleichung (8) die Voraussetzung zur Anwendbarkeit unseres Rechenverfahrens darstellt, führen wir Hilfs-

momente $M^A_{H,m}$ und $M^B_{H,m}$ derart ein, daß die aus den Querkräften der Ersatzendpfosten herrührenden Momente nach (7a), (7b) an den Stellen $x = x_A$ und $x = x_B$ so auf die vorhandenen r Riegel verteilt werden, daß die endgültigen Momente der Riegel des Ersatzsystems der Gleichung (8) gehorchen (Abb. 7). An der Summe der durch (7a) bzw. (7b) gegebenen Momente über alle r Riegel tritt dadurch keine Änderung ein; es ist demnach

$$\sum_{\nu=1}^{r} M^A_{H,\nu} = 0\,, \qquad \sum_{\nu=1}^{r} M^B_{H,\nu} = 0\,. \tag{9}$$

Die Momente $M^A_{H,m}$ bilden also an der Stelle $x = x_A$ und die Momente $M^B_{H,m}$ an der Stelle $x = x_B$ Gleichgewichtsgruppen, die in dem gegebenen System einen Eigenspannungszustand hervorrufen. Die Einführung der Hilfsmomente ist daher qualitativ mit der Annahme zu vergleichen, daß in der Balkenstatik die Auflagerreaktion durch parabelförmig über die Querschnittshöhe verteilte Tangentialspannungen eingeleitet wird. Auch diese Annahme ruft im Balken einen Eigenspannungszustand hervor, der nach dem Prinzip von *de St. Venant* etwa in einer Entfernung vom Auflager gleich der Balkenhöhe abgeklungen ist; dieser Eigenspannungszustand ist den aus einer Balkenrechnung ermittelten Be-

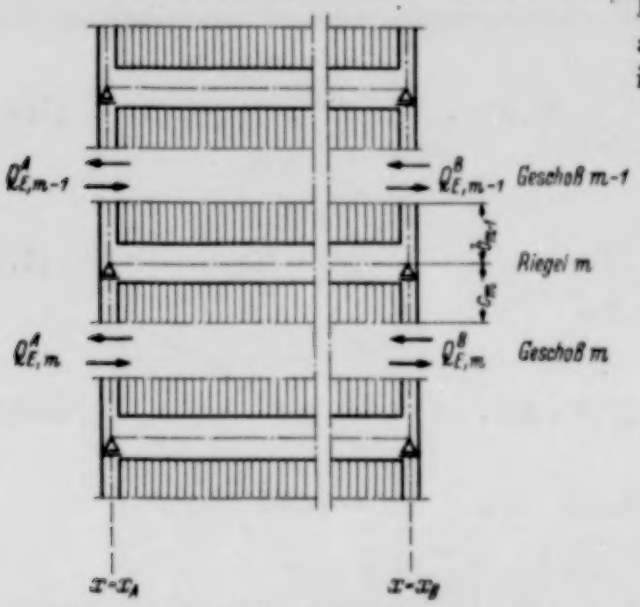

Abb. 6. Querkräfte der Ersatzendpfosten.

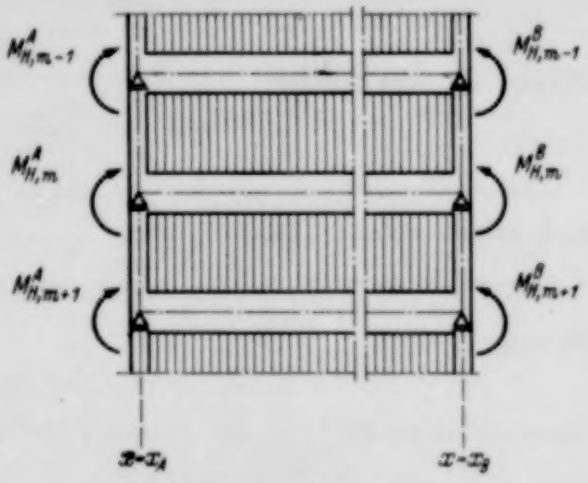

Abb. 7. Hilfsmomente am Ersatzsystem.

anspruchungen zu superponieren. Da bei den von uns behandelten gegliederten Scheiben der Angriffsbereich der Gleichgewichtsgruppe bei hohen Scheiben die gleiche Größenordnung wie die Spannweite erreichen kann, wird der Eigenspannungszustand nicht als rasch abklingend wie beim Balken vernachlässigbar sein; jedoch werden wir für ihn eine einfache Abschätzung durchführen können.

Wir behandeln zunächst das Ersatzsystem unter der Voraussetzung der Existenz der oben beschriebenen Hilfsmomente. Der Riegel m erhält aus den Lamellenquerkräften und den Querkräften der Ersatzendpfosten der Geschosse $m-1$ und m Momente. Wir bezeichnen das auf den Riegel m wirkende Moment aus diesen Kräften mit $M_{q,m}(x)$:

$$\left.\begin{aligned} M_{q,m}(x) = &- \int_x^{x_B} [b_{m-1}\, q_{m-1}(\eta) + c_m\, q_m(\eta)]\, d\eta \\ &+ A_{q,m}\,(x_B - x) + B_{q,m} - (Q^B_{E,m-1}\, b_{m-1} + Q^B_{E,m}\, c_m)\,. \\ &(1 \leqq m \leqq r\,, \quad q_0(\eta) \equiv 0\,, \quad q_r(\eta) \equiv 0\,, \quad Q^B_{E,0} = 0\,, \quad Q^B_{E,r} = 0) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Der Riegel m erhält aus den Lamellennormalkräften der Geschosse $m-1$ und m Momente. Wir bezeichnen das auf den Riegel m aus diesen Kräften wirkende Moment mit $M_{n,m}(x)$:

$$\left.\begin{aligned} M_{n,m}(x) = \int_x^{x_B} [n_{m-1}(\eta) - n_m(\eta)]\,(\eta - x)\, d\eta + (A_{n,m} + N^B_{m-1} - N^B_m)\,(x_B - x) + B_{n,m} \\ (1 \leqq m \leqq r;\;\; n_0(\eta) \equiv 0;\;\; n_r(\eta) \equiv 0;\;\; N^B_0 = 0;\;\; N^B_r = 0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die angeschriebene Form der Konstanten wird aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählt. Die Konstanten $A_{n,m}$ und $B_{n,m}$ lassen sich in die von n_{m-1} und n_m herrührende Anteile zerlegen:

$$A_{n,m} = A'_{n,m} - A'_{n,m-1}\,, \qquad B_{n,m} = B'_{n,m} - B'_{n,m-1}\,. \tag{12}$$

Außerdem erhalten die Riegel noch ein Moment $M_{H,m}(x)$ aus den Hilfsmomenten $M^A_{H,m}$ und $M^B_{H,m}$:

$$M_{H,m}(x) = M^B_{H,m} - (M^B_{H,m} - M^A_{H,m}) \frac{x_B - x}{x_B - x_A} . \tag{13}$$

Damit lauten die Riegelmomente $M_{E,m}(x)$ im Ersatzsystem

$$M_{E,m}(x) = M_{0,m}(x) + M_{q,m}(x) + M_{n,m}(x) + M_{H,m}(x) \quad (1 \leqq m \leqq r) . \tag{14}$$

Gemäß (11) und (12) sowie (9) und (13) wird

$$\sum_{\nu=1}^{r} M_{n,\nu}(x) \equiv 0 , \qquad \sum_{\nu=1}^{r} M_{H,\nu}(x) \equiv 0 ,$$

so daß als Summe aller Riegelmomente nach (14)

$$\sum_{\nu=1}^{r} M_{E,\nu}(x) = \sum_{\nu=1}^{r} M_{0,\nu}(x) + \sum_{\nu=1}^{r} M_{q,\nu}(x) \tag{15}$$

folgt. Aufgrund der gemäß (4) vorgenommenen Aufteilung der gegebenen Last $\bar{p}(x)$ auf die Riegel wird

$$M_{0,m}(x) = \frac{I_{1,m}}{\sum_{\nu=1}^{r} I_{1,\nu}} \sum_{\nu=1}^{r} M_{0,\nu}(x) . \tag{16a}$$

Wir führen als Abkürzung

$$i_{1,m} = \frac{I_{1,m}}{\sum_{\nu=1}^{r} I_{1,\nu}} \tag{17}$$

ein und erhalten aus (16a)

$$M_{0,m}(x) = i_{1,m} \sum_{\nu=1}^{r} M_{0,\nu}(x) . \tag{16b}$$

Aus (8) folgt

$$M_{E,m}(x)\, I_{1,\nu} = M_{E,\nu}(x)\, I_{1,m} .$$

Die Summation dieser Gleichung über ν liefert mit (17)

$$M_{E,m}(x) = i_{1,m} \sum_{\nu=1}^{r} M_{E,\nu}(x) . \tag{18}$$

Mit (16b) und (18) folgt aus (15)

$$M_{E,m}(x) = M_{0,m}(x) + i_{1,m} \sum_{\nu=1}^{r} M_{q,\nu}(x) \qquad (1 \leqq m \leqq r) . \tag{19}$$

Damit ist es gelungen, die Riegelmomente $M_{E,m}(x)$ des Ersatzsystems allein durch die unbekannten Querkraftfunktionen der Lamellen und die unbekannten Querkräfte der Ersatzendpfosten auszudrücken. Wir führen eine Bezugssteifigkeit I_e ein und definieren mit ihrer Hilfe die von m unabhängigen Momente

$$\frac{\overline{M}_E(x)}{I_e} = \frac{M_{E,m}(x)}{I_{1,m}} , \qquad \frac{\overline{M}_0(x)}{I_e} = \frac{M_{0,m}(x)}{I_{1,m}} , \qquad (1 \leqq m \leqq r) . \tag{20}$$

Als weitere Abkürzung wählen wir

$$i_e = i_{1,m} \frac{I_e}{I_{1,m}} = \frac{I_e}{\sum_{\nu=1}^{r} I_{1,\nu}} . \tag{21}$$

Aus den r Gleichungen (19) folgt damit eine einzige Beziehung:

$$\overline{M}_E(x) = \overline{M}_0(x) + i_e \sum_{\nu=1}^{r} M_{q,\nu}(x) . \tag{22}$$

Wir setzen in (22) $M_{q,\nu}(x)$ nach (10) ein und erhalten unter Beachtung von $a_{1,m} = b_m + c_m$

$$\overline{M}_E(x) = \overline{M}_0(x) - i_e \sum_{\nu=1}^{r-1} \left[a_{1,\nu} \int_x^{x_B} q_\nu(\eta)\, d\eta \right] + i_e A_q (x_B - x) + i_e B_q - i_e \sum_{\nu=1}^{r-1} a_{1,\nu} Q^B_{E,\nu} . \tag{23}$$

Darin bedeuten

$$A_q = \sum_{\nu=1}^{r} A_{q,\nu} , \qquad B_q = \sum_{\nu=1}^{r} B_{q,\nu} . \tag{24}$$

Die für alle Riegel gleiche Durchbiegung $y(x)$ genügt der Balkendifferentialgleichung

$$E\,I_e\,y''(x) = -\,M_{E,m}(x)\,\frac{I_e}{I_{1,m}} = -\,\overline{M}_E(x)\,. \tag{25}$$

Durch die Verformung $y(x)$ der Riegel, an der sich die durchschnittenen Lamellen widerstandslos beteiligen, erfahren die Schnittufer eine Klaffung $\delta_{1,m}(x)$ von der Größe (Abb. 8a)

$$\delta_{1,m}(x) = a_{1,m}\,y'(x)\,. \tag{26}$$

Außerdem erfahren die Lamellen unter ihrer Querkraft $q_m(x)\,dx$ eine Biegeverformung, die eine Klaffung $\delta_{2,m}(x)$ hervorruft (Abb. 8b)

$$\delta_{2,m}(x) = \frac{a_2\,l_{2,m}^3}{12\,E\,I_{2,m}}\,q_m(x)\,. \tag{27}$$

Schließlich können sich bei seitlich verschieblichen Systemen die Riegel in Richtung der Riegelachsen im m-ten Geschoß um die Strecke $\delta_{3,m}$ gegeneinander verschieben (Abb. 8c).

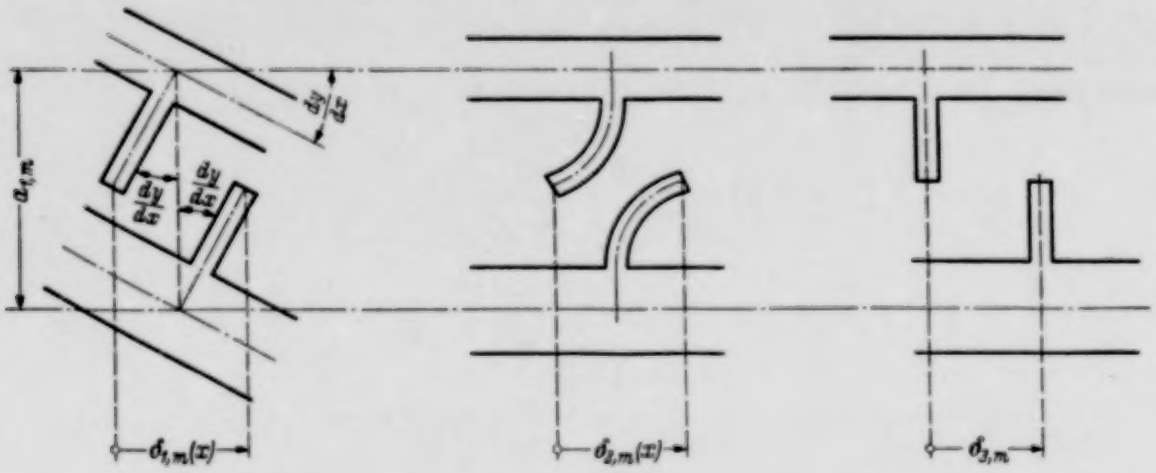

Abb. 8. Endverformungen einer in halber lichter Länge getrennten Lamelle.
a) aus Riegeldurchbiegung; b) aus Lamellenquerkraft; c) aus seitlicher Riegelverschiebung.

Die Kontinuität des gegebenen Systems verlangt das Schließen der künstlich getrennten Lamellenschnittufer. Die Forderungen der Kontinuität lauten daher

$$\delta_{1,m}(x) + \delta_{2,m}(x) + \delta_{3,m} = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq r-1)\,. \tag{28}$$

Nach Multiplikation mit $E\,I_e/a_{1,m}$ erhalten wir unter Verwendung von (26) und (27)

$$E\,I_e\,y'(x) + \frac{a_2\,l_{2,m}^3}{12\,a_{1,m}}\,\frac{I_e}{I_{2,m}}\,q_m(x) + E\,I_e\,\frac{\delta_{3,m}}{a_{1,m}} = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq r-1)\,. \tag{29}$$

Wir definieren

$$\bar{q}_m(x) = \frac{l_{2,m}^3\,I_e}{x_B^2\,a_{1,m}\,I_{2,m}}\,q_m(x)\,, \tag{30}$$

$$\bar{\delta}_{3,m} = \frac{12\,E\,I_e}{x_B^2\,a_{1,m}\,a_2}\,\delta_{3,m}\,. \tag{31}$$

Hiermit folgt aus (29)

$$E\,I_e\,y'(x) + \frac{x_B^2\,a_2}{12}\,[\bar{q}_m(x) + \bar{\delta}_{3,m}] = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq r-1)\,. \tag{32}$$

Die eckige Klammer in (32) muß von m unabhängig sein, da $E\,I_e y'(x)$ und der Vorfaktor der Klammer von m unabhängig sind. Wir definieren daher eine von m unabhängige Hilfsfunktion

$$\bar{q}(x) = \bar{q}_m(x) + \bar{\delta}_{3,m} \qquad (1 \leqq m \leqq r-1) \tag{33}$$

und erhalten an Stelle der $r-1$ Kontinuitätsbedingungen gemäß (32) als einzige Kontinuitätsgleichung

$$E\,I_e\,y'(x) + \frac{x_B^2\,a_2}{12}\,\bar{q}(x) = 0\,. \tag{34}$$

Wir differentiieren diese Gleichung einmal nach x und erhalten unter Verwendung von (25)

$$\bar{q}'(x) - \frac{12}{x_B^2 a_2} \bar{M}_E(x) = 0 . \tag{35}$$

$\bar{M}_E(x)$ ist nach (23) in Abhängigkeit aller Querkräfte gegeben. Aus (30) und (33) folgt

$$q_\nu(x) = \frac{x_B^2 a_{1,\nu} I_{2,\nu}}{l_{2,\nu}^3 I_e} [\bar{q}(x) - \bar{\delta}_{3,\nu}] \qquad (1 \leqq \nu \leqq r-1) . \tag{36}$$

Die Gleichung (36) sagt aus, daß zwischen den Lamellenquerkräften verschiedener Geschosse lineare Beziehungen bestehen. Mit ihrer Hilfe formen wir die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{r-1} \left[a_{1,\nu} \int_x^{x_B} q_\nu(\eta)\, d\eta \right] = \int_x^{x_B} \left\{ \sum_{\nu=1}^{r-1} [a_{1,\nu}\, q_\nu(\eta)] \right\} d\eta$$

um; es wird

$$\sum_{\nu=1}^{r-1} a_{1,\nu}\, q_\nu(\eta) = \bar{q}(\eta) \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{x_B^2 a_{1,\nu}^2 I_{2,\nu}}{l_{2,\nu}^3 I_e} - \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{x_B^2 a_{1,\nu} I_{2,\nu}}{l_{2,\nu}^3 I_e} \bar{\delta}_{3,\nu} .$$

Wir führen ein:

$$\alpha^2 = \frac{12\, x_B^2}{a_2} \frac{\sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{a_{1,\nu}^2}{l_{2,\nu}^3} I_{2,\nu}}{\sum_{\nu=1}^{r} I_{1,\nu}} , \tag{37}$$

$$\gamma = -x_B^2 \frac{\sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{a_{1,\nu}^2}{l_{2,\nu}^3} I_{2,\nu} \bar{\delta}_{3,\nu}}{\sum_{\nu=1}^{r} I_{1,\nu}} . \tag{38}$$

Aus der zweiten Gleichung (6) und aus (36) folgt mit (37) und (38)

$$i_e \sum_{\nu=1}^{r-1} a_{1,\nu}\, Q_{E,\nu}^B = \frac{a_2^2 \alpha^2 i_2^B}{12} \bar{q}(x_B) + a_2 i_2^B \gamma .$$

Dann ergibt sich mit (23)

$$\bar{M}_E(x) - \bar{M}_0(x) = -\frac{a_2}{12} \alpha^2 \int_x^{x_B} \bar{q}(\eta)\, d\eta + (i_e A_q - \gamma)(x_B - x) + i_e B_q - \frac{a_2^2}{12} \alpha^2 i_2^B \bar{q}(x_B) - a_2 i_2^B \gamma . \tag{39}$$

$\bar{M}_E$ nach (39) setzen wir in (35) ein und erhalten als Differentialgleichung für das Integral der gesuchten Funktion $\bar{q}(x)$

$$\bar{q}'(x) + \frac{\alpha^2}{x_B^2} \int_x^{x_B} \bar{q}(\eta)\, d\eta = \frac{12}{x_B^2 a_2} \left[\bar{M}_0(x) + (i_e A_q - \gamma)(x_B - x) + i_e B_q - \frac{a_2^2}{12} \alpha^2 i_2^B \bar{q}(x_B) - a_2 i_2^B \gamma \right] . \tag{40}$$

Durch nochmalige Differentiation nach x finden wir als Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $\bar{q}(x)$

$$\bar{q}''(x) - \frac{\alpha^2}{x_B^2} \bar{q}(x) = \frac{12}{x_B^2 a_2} [\bar{M}_0'(x) - (i_e A_q - \gamma)] . \tag{41}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeine Lösung mit der dimensionslosen Variablen

$$\xi = \frac{x}{x_B} \tag{42}$$

die Form

$$\bar{q}(\xi) = \bar{q}_p(\xi) + C_1 \operatorname{Cof} \alpha \xi + C_2 \operatorname{Sin} \alpha \xi \tag{43}$$

besitzt.

Das Partikularintegral $\bar{q}_p(x)$ hängt von $\bar{M}_0'(x)$ und der Konstanten $(i_e A_q - \gamma)$ ab. In γ sind als Konstanten die unbekannten Seitenverschiebungen $\delta_{3,\nu}$ mit $1 \leqq \nu \leqq r-1$ enthalten. Die Konstanten A_q, C_1, C_2 und $\delta_{3,\nu}$ folgen aus den Randbedingungen. Für den Spezialfall, daß $\bar{M}_0(x)$

höchstens quadratisch von x abhängig ist, folgt aus (41)

$$\bar{q}_p(x) = -\frac{12}{\alpha^2 a_2}\left[\bar{M}_0'(x) - (i_e A_q - \gamma)\right]. \tag{44}$$

Damit haben wir die unbekannten Lamellenquerkräfte bestimmt, ohne die ebenfalls unbekannten Lamellennormalkräfte zu kennen, die wir im Folgenden ermitteln werden. Aus (39) und der mit $I_e/I_{1,m}$ multiplizierten Gleichung (14) folgt durch Gleichsetzen

$$M_{n,m}(x) = -M_{q,m}(x) - M_{H,m}(x) - \frac{a_2 \alpha^2 I_{1,m}}{12 I_e}\int_x^{x_B} \bar{q}(\eta)\, d\eta + \left(i_{1,m} A_q - \frac{I_{1,m}}{I_e}\gamma\right)(x_B - x) + i_{1,m} B_q - \frac{a_2^2 \alpha^2 i_2^B I_{1,m}}{12 I_e}\bar{q}(x_B) - a_2 i_2^B \frac{I_{1,m}}{I_e}\gamma. \tag{45}$$

$M_{q,m}(x)$ ist nach (10) gegeben; in (10) setzen wir q_{m-1} und q_m nach (36) ein und erhalten

$$M_{n,m}(x) = \bar{\varrho}_m x_B \int_x^{x_B} \bar{q}(\eta)\, d\eta + \left[i_{1,m} A_q - A_{q,m} - \delta_{3,m}^{*} + \frac{M_{H,m}^B - M_{H,m}^A}{x_B - x_A}\right](x_B - x) + \left[i_{1,m} B_q - B_{q,m} - a_2 i_2^B \delta_{3,m}^{*} + \bar{\varrho}_m x_B a_2 i_2^B \bar{q}(x_B) - M_{H,m}^B\right] \tag{46}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varrho}_m &= \frac{b_{m-1} a_{1,m-1} x_B I_{2,m-1}}{l_{2,m-1}^3 I_e} + \frac{c_m a_{1,m} x_B I_{2,m}}{l_{2,m}^3 I_e} - \frac{\alpha^2 a_2 I_{1,m}}{12 x_B I_e} \\ &\left(1 \leqq m \leqq r, \quad \frac{b_0 a_{1,0} I_{2,0}}{l_{2,0}^3} = 0, \quad \frac{c_r a_{1,r} I_{2,r}}{l_{2,r}^3} = 0\right) \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

und

$$\delta_{3,m}^{*} = \frac{I_{1,m}}{I_e}\gamma + \frac{b_{m-1} a_{1,m-1} x_B^2 I_{2,m-1}}{l_{2,m-1}^3 I_e}\bar{\delta}_{3,m-1} + \frac{c_m a_{1,m} x_B^2 I_{2,m}}{l_{2,m}^3 I_e}\bar{\delta}_{3,m}. \tag{48}$$

Wir führen als Hilfsfunktion $\bar{n}_m(x)$ die auf den Riegel m wirkenden Normalkräfte ein:

$$\bar{n}_m(x) = n_m(x) - n_{m-1}(x) \qquad (n_0(x) \equiv 0,\ n_r(x) \equiv 0), \tag{49a}$$

$$\bar{N}_m^B = N_m^B - N_{m-1}^B \qquad (N_0^B = 0,\ N_r^B = 0), \tag{49b}$$

$$\bar{N}_m^A = N_m^A - N_{m-1}^A \qquad (N_0^A = 0,\ N_r^A = 0). \tag{49c}$$

Damit lautet (11)

$$M_{n,m}(x) = -\int_x^{x_B} \bar{n}_m(\eta)(\eta - x)\, d\eta + (A_{n,m} - \bar{N}_m^B)(x_B - x) + B_{n,m}. \tag{50}$$

Gleichsetzen der rechten Seiten von (46) und (50) liefert nach zweimaliger Differentiation

$$\bar{n}_m(x) = \bar{\varrho}_m x_B \bar{q}'(x). \tag{51}$$

Nach Einsetzen von (51) in (50) erhalten wir bei Berücksichtigung der Gleichheit von

$$\int_x^{x_B} \bar{n}_m(\eta)(\eta - x)\, d\eta + \bar{\varrho}_m x_B \int_x^{x_B} \bar{q}(\eta)\, d\eta = x_B (x_B - x)\bar{\varrho}_m \bar{q}(x_B)$$

aus der zu fordernden Identität von (50) und (46)

$$\begin{aligned} &(A_{n,m} - \bar{N}_{B,m})(x_B - x) + B_{n,m} \\ &= x_B (x_B - x)\bar{\varrho}_m \bar{q}(x_B) + \left[i_{1,m} A_q - A_{q,m} - \delta_{3,m}^{*} + \frac{M_{H,m}^B - M_{H,m}^A}{x_B - x_A}\right](x_B - x) \\ &\quad + \left[i_{1,m} B_q - B_{q,m} - a_2 i_2^B \delta_{3,m}^{*} + a_2 i_2^B x_B \bar{\varrho}_m \bar{q}(x_B) - M_{H,m}^B\right]. \end{aligned}$$

Bei dem nun durchzuführenden Koeffizientenvergleich nehmen wir gleichzeitig eine Aufspaltung vor, und zwar definieren wir $A_{n,m}$ bzw. $B_{n,m}$ als jeweils den Anteil, der aus den äußeren Reaktionen der q_m-Kräfte herrührt, d. h. es gilt

$$A_{n,m} = i_{1,m} A_q - A_{q,m}, \tag{52a}$$

$$B_{n,m} = i_{1,m} B_q - B_{q,m}. \tag{52b}$$

Jedoch verbleibt auch dann, wenn die inneren Kräfte q_m keine Reaktionen $A_{q,m}$ erzeugen (also auch dann, wenn überhaupt keine Lager an der Stelle $x = x_B$ vorhanden sind), eine Konstante, die mechanisch als singuläre Endnormalkraft $\bar{N}_m^B$ zu erklären ist:

$$\bar{N}_m^B = -\bar{\varrho}_m x_B \bar{q}(x_B) + \delta_{3,m}^* - \frac{M_{H,m}^B - M_{H,m}^A}{x_B - x_A} . \tag{52c}$$

Weiterhin resultiert aus diesem Koeffizientenvergleich die Bestimmungsgleichung für das Hilfsmoment $M_{H,m}^B$

$$M_{H,m}^B = a_2 i_2^B [\bar{\varrho}_m x_B \bar{q}(x_B) - \delta_{3,m}^*] . \tag{52d}$$

Aus Gleichgewichtsbetrachtungen folgt schließlich

$$\bar{N}_m^A = \bar{\varrho}_m x_B \bar{q}(x_A) - \delta_{3,m}^* + \frac{M_{H,m}^B - M_{H,m}^A}{x_B - x_A} , \tag{52e}$$

$$M_{H,m}^A = -a_2 i_2^A [\bar{\varrho}_m x_B \bar{q}(x_A) - \delta_{3,m}^*] . \tag{52f}$$

Gleichung (52d) und (52f) folgen auch aus der Summation von (7a) und (7b) über m von 1 bis r und anschließender Aufteilung dieser Summe im Verhältnis der Riegelträgheitsmomente. Es wird gemäß (52d) und (52f)

$$M_{H,m}^B - M_{H,m}^A = a_2 \{\bar{\varrho}_m x_B [i_2^B \bar{q}(x_B) + i_2^A \bar{q}(x_A)] - \delta_{3,m}^* (i_2^B + i_2^A)\} . \tag{52g}$$

Nach (49a) gilt

$$n_m(x) = \bar{n}_m(x) + n_{m-1}(x) .$$

Da $n_0(x) \equiv 0$ ist, folgt

$$n_m(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \bar{n}_\nu(x) .$$

Mit der Definition

$$\varrho_m = \sum_{\nu=1}^{m} \bar{\varrho}_\nu \tag{53}$$

ergibt sich für die Lamellennormalkraft explizit

$$n_m(x) = \varrho_m x_B \bar{q}'(x) . \tag{54a}$$

Analog folgen als singuläre Endlamellennormalkräfte an den Stellen $x = x_A$ und $x = x_B$

$$N_m^A = \varrho_m x_B \left\{\bar{q}(x_A) + \frac{a_2}{x_B - x_A} [i_2^B \bar{q}(x_B) + i_2^A \bar{q}(x_A)]\right\} - \left[1 + \frac{a_2}{x_B - x_A} (i_2^B + i_2^A)\right] \sum_{\nu=1}^{m} \delta_{3,\nu}^* , \tag{54b}$$

$$N_m^B = -\varrho_m x_B \left\{\bar{q}(x_B) + \frac{a_2}{x_B - x_A} [i_2^B q(x_B) + i_2^A \bar{q}(x_A)]\right\} + \left[1 + \frac{a_2}{x_B - x_A} (i_2^B + i_2^A)\right] \sum_{\nu=1}^{m} \delta_{3,\nu}^* \tag{54c}$$

mit

$$\sum_{\nu=1}^{m} \delta_{3,\nu}^* = \frac{x_B^2}{I_c} \left[\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{a_{1,\nu}^2 I_{2,\nu}}{l_{2,\nu}^3} \bar{\delta}_{3,\nu} + \frac{\gamma}{x_B^2} \sum_{\nu=1}^{m} I_{1,\nu} + \frac{c_m a_{1,m} I_{2,m}}{l_{2,m}^3} \bar{\delta}_{3,m}\right] . \tag{54d}$$

Für das Ersatzsystem haben wir vorstehend die unbekannten Quer- und Normalkräfte der Lamellen ermittelt. Die eigentlich gesuchten unbekannten Quer- und Normalkräfte der Pfosten des gegebenen Systems erhalten wir hieraus durch Integration. Wir bezeichnen die Querkraft eines Pfostens an der Stelle x_k im m-ten Geschoß mit $Q_{P,m}(x_k)$, die Normalkraft dieses Pfostens mit $N_{P,m}(x_k)$. Entsprechend den mit einem Vorfaktor nach (30) multiplizierten Lamellenquerkräften $\bar{q}_m(x)$ führen wir auch Pfostenquerkräfte $\bar{Q}_{P,m}(x_k)$ ein:

$$\bar{Q}_{P,m}(x_k) = \frac{l_{2,m}^3 I_c}{x_B^2 a_{1,m} I_{2,m}} Q_{P,m}(x_k) . \tag{55}$$

Es wird mit (33) für die Innenpfosten

$$\bar{Q}_{P,m}(x_k) = \int_{x_k - \frac{a_2}{2}}^{x_k + \frac{a_2}{2}} \bar{q}(x)\, dx - a_2 \bar{\delta}_{3,m} \tag{56a}$$

und für die Endpfosten

$$\bar{Q}_{P,m}(x_A) = \int_{x_A}^{x_A+\frac{a_2}{2}} \bar{q}(x)\,dx + a_2\, i_2^A\, \bar{q}(x_A) - \frac{a_2}{2}\bar{\delta}_{3,m}\,(1+2\,i_2^A)\,, \tag{56b}$$

$$\bar{Q}_{P,m}(x_B) = \int_{x_B-\frac{a_2}{2}}^{x_B} \bar{q}(x)\,dx + a_2\, i_2^B\, \bar{q}(x_B) - \frac{a_2}{2}\bar{\delta}_{3,m}\,(1+2\,i_2^B)\,. \tag{56c}$$

Für ein System mit Außenpfosten, die nicht am Riegelende angeordnet sind (Abb. 2), erfahren die Integrationsgrenzen eine entsprechende Änderung; der Vorfaktor von $\bar{\delta}_{3,m}$ ist gleich der Länge des Integrationsbereiches.

Mit der dimensionslosen Abkürzung

$$\lambda = \frac{2\,x_B}{\alpha\,a_2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\alpha\,a_2}{2\,x_B} \tag{57}$$

folgt mit (43) aus (56a) bis (56c)

$$\bar{Q}_{P,m}(x_k) = \int_{x_k-\frac{a_2}{2}}^{x_k+\frac{a_2}{2}} \bar{q}_p(x)\,dx - a_2\,\bar{\delta}_{3,m} + a_2\,\lambda\,(C_1\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\xi_k + C_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_k)\,, \tag{58a}$$

$$\bar{Q}_{P,m}(x_A) = \int_{x_A}^{x_A+\frac{a_2}{2}} \bar{q}_p(x)\,dx + a_2\, i_2^A\, \bar{q}_p(x_A) - \frac{a_2}{2}\bar{\delta}_{3,m}\,(1+2\,i_2^A)$$

$$+\frac{a_2}{2}\lambda\left\{\left[C_1\left(1+\frac{2\,i_2^A}{\lambda}\right)+C_2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B}\right]\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\xi_A+\left[C_1\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B}+C_2\left(1+\frac{2\,i_2^A}{\lambda}\right)\right]\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_A\right\}, \tag{58b}$$

$$\bar{Q}_{P,m}(x_B) = \int_{x_B-\frac{a_2}{2}}^{x_B} \bar{q}_p(x)\,dx + a_2\, i_2^B\, \bar{q}_p(x_B) - \frac{a_2}{2}\bar{\delta}_{3,m}\,(1+2\,i_2^B)$$

$$+\frac{a_2}{2}\lambda\left\{\left[C_1\left(1+\frac{2\,i_2^B}{\lambda}\right)-C_2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B}\right]\mathfrak{Cof}\,\alpha+\left[-C_1\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B}+C_2\left(1+\frac{2\,i_2^B}{\lambda}\right)\right]\mathfrak{Sin}\,\alpha\right\}. \tag{58c}$$

Die tatsächlichen Pfostenquerkräfte $Q_{P,m}$ folgen aus den bezogenen Querkräften $\bar{Q}_{P,m}$ nach (55).

Die Pfostennormalkräfte des gegebenen Systems, an dem zusätzlich die in (52d) und (52f) angeschriebenen Hilfsmomente wirken, nennen wir $N^*_{P,m}(x)$; sie lauten, wenn die Außenpfosten am Riegelende angeordnet sind (Abb. 1), für die Innenpfosten

$$N^*_{P,m}(x_k) = \int_{x_k-\frac{a_2}{2}}^{x_k+\frac{a_2}{2}} n_m(x)\,dx \tag{59a}$$

und für die Endpfosten

$$N^*_{P,m}(x_A) = \int_{x_A}^{x_A+\frac{a_2}{2}} n_m(x)\,dx + N_m^A\,, \tag{59b}$$

$$N^*_{P,m}(x_B) = \int_{x_B-\frac{a_2}{2}}^{x_B} n_m(x)\,dx + N_m^B\,. \tag{59c}$$

Für ein System mit Außenpfosten, die nicht am Riegelende angeordnet sind (Abb. 2), erfahren die Integrationsgrenzen von (59b) und (59c) eine entsprechende Änderung. Außerdem wirken die singulären Endlamellennormalkräfte N_m^A und N_m^B nicht an den Stellen der Außenpfosten, so daß sie nicht der Normalkraft dieser Außenpfosten superponiert werden dürfen.

Vielmehr sind sie mit umgekehrter Wirkungsrichtung an dem gegebenen Rahmen anzusetzen. Sie bewirken in allen Pfosten Quer- und Normalkräfte, die den bereits ermittelten Kräften zu superponieren sind. Mit guter Näherung können die Pfostenquerkräfte aus dieser Endkraft vernachlässigt und die Pfostennormalkräfte als Reaktionen eines an den Stellen der Pfosten fest gestützten und frei drehbaren Durchlaufträgers errechnet werden, der an den Rändern $x = x_A$ und $x = x_B$ wie die Riegel des gegebenen Systems gelagert ist.

Mit (54a) bis (54c) folgt aus (59a) bis (59c)

$$N^{\bullet}_{P,m}(x_k) = \varrho_m x_B \left[\bar{q}\left(x_k + \frac{a_2}{2}\right) - \bar{q}\left(x_k - \frac{a_2}{2}\right)\right], \tag{59d}$$

$$N^{\bullet}_{P,m}(x_A) = \varrho_m x_B \left\{\bar{q}\left(x_A + \frac{a_2}{2}\right) + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left[i_2^B\, \bar{q}(x_B) + i_2^A\, \bar{q}(x_A)\right]\right\} - \left[1 + \frac{a_2}{x_B - x_A}(i_2^B + i_2^A)\right] \sum_{\nu=1}^{m} \delta^{\bullet}_{3,\nu}, \tag{59e}$$

$$N^{\bullet}_{P,m}(x_B) = -\varrho_m x_B \left\{\bar{q}\left(x_B - \frac{a_2}{2}\right) + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left[i_2^B\, \bar{q}(x_B) + i_2^A\, q(x_A)\right]\right\} + \left[1 + \frac{a_2}{x_B - x_A}(i_2^B + i_2^A)\right] \sum_{\nu=1}^{m} \delta^{\bullet}_{3,\nu}. \tag{59f}$$

Mit (43) ergibt sich dann

$$N^{\bullet}_{P,m}(x_k) = \varrho_m x_B \left[\bar{q}_P\left(x_k + \frac{a_2}{2}\right) - \bar{q}_P\left(x_k - \frac{a_2}{2}\right) + \alpha\,\lambda\,\frac{a_2}{x_B}\left(C_1\, \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_k + C_2\, \mathfrak{Cof}\,\alpha\,\xi_k\right)\right], \tag{60a}$$

$$\begin{aligned} N^{\bullet}_{P,m}(x_A) = \varrho_m x_B \Bigg\{ & \bar{q}_P\left(x_A + \frac{a_2}{2}\right) + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left[i_2^B\, \bar{q}_P(x_B) + i_2^A\, \bar{q}_P(x_A)\right] \\ & + C_1\left[\mathfrak{Cof}\left\langle \alpha\left(\xi_A + \frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left(i_2^B\, \mathfrak{Cof}\,\alpha + i_2^A\, \mathfrak{Cof}\,\alpha\,\xi_A\right)\right] \\ & + C_2\left[\mathfrak{Sin}\left\langle \alpha\left(\xi_A + \frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left(i_2^B\, \mathfrak{Sin}\,\alpha + i_2^A\, \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_A\right)\right]\Bigg\} \\ & - \left[1 + \frac{a_2}{x_B - x_A}(i_2^A + i_2^B)\right] \sum_{\nu=1}^{m} \delta^{\bullet}_{3,\nu}, \end{aligned} \tag{60b}$$

$$\begin{aligned} N^{\bullet}_{P,m}(x_B) = -\varrho_m x_B \Bigg\{ & \bar{q}_P\left(x_B - \frac{a_2}{2}\right) + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left[i_2^B\, \bar{q}_P(x_B) + i_2^A\, \bar{q}_P(x_A)\right] \\ & + C_1\left[\mathfrak{Cof}\left\langle \alpha\left(1 - \frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left(i_2^B\, \mathfrak{Cof}\,\alpha + i_2^A\, \mathfrak{Cof}\,\alpha\,\xi_A\right)\right] \\ & + C_2\left[\mathfrak{Sin}\left\langle \alpha\left(1 - \frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle + \frac{a_2}{x_B - x_A}\left(i_2^B\, \mathfrak{Sin}\,\alpha + i_2^A\, \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_A\right)\right]\Bigg\} \\ & + \left[1 + \frac{a_2}{x_B - x_A}(i_2^A + i_2^B)\right] \sum_{\nu=1}^{m} \delta^{\bullet}_{3,\nu}. \end{aligned} \tag{60c}$$

Es wurde vorstehend das Ersatzsystem unter der Voraussetzung von außen angebrachter Hilfsmomente $M^A_{H,m}$ und $M^B_{H,m}$ behandelt. Die Größe dieser Hilfsmomente folgt aus (52d) und (52f). Da im gegebenen System die Hilfsmomente nicht existieren, superponieren wir dem von uns am Ersatzsystem ermittelten Beanspruchungszustand einen weiteren Zustand, den wir durch Anbringen der Hilfsmomente in umgekehrter Wirkungsrichtung am gegebenen System erhalten (Abb. 9). Wir haben bei der Einführung der Hilfsmomente erläutert, daß sie Gleichgewichtsgruppen bilden. Für diesen Eigenspannungszustand vernachlässigen wir die Biegesteifigkeit der Pfosten. Dann erfahren die Riegel an den Kreuzungspunkten ihrer Systemlinien mit denen der Pfosten keine Vertikalverschiebung und wir können sie als Durchlaufträger behandeln, die an ihren Enden $x = x_A$ und $x = x_B$ wie die gegebenen Riegel gelagert und mit den Momenten $-M^A_{H,m}$ und $-M^B_{H,m}$ belastet sind. Die aus dieser Durchlaufträgerrechnung resultierenden Auflagerkräfte nennen wir $\bar{N}_{H,m}(x_k)$; sie sind in Abb. 10 als positiv wirkende Größen eingetragen. Die daraus sich ergebenden Pfostennormalkräfte bezeichnen wir mit $N_{H,m}(x_k)$; es gilt

$$\bar{N}_{H,m}(x_k) = N_{H,m}(x_k) - N_{H,m-1}(x_k) \qquad (1 \leqq m \leqq r\,,\ N_{H,0} = 0\,,\ N_{H,r} = 0)\,. \tag{61}$$

Hieraus folgt

$$N_{H,m}(x_k) = \sum_{\nu=1}^{m} \bar{N}_{H,\nu}(x_k)\,. \tag{62}$$

Die endgültigen Normalkräfte der Pfosten des gegebenen Systems lauten

$$N_{P,m}(x_k) = N^*_{P,m}(x_k) + N_{H,m}(x_k)\,. \tag{63}$$

Eine eventuell vorhandene geringere Genauigkeit der auf diese Weise ermittelten Zusatzgrößen gegenüber den aus dem Ersatzsystem ermittelten Beanspruchungsgrößen ist ohne Bedeutung, da dieser Zusatzlastfall an sich nur einen geringen Anteil gegenüber dem im Ersatzsystem behandelten Fall hat und daher die möglicherweise vorhandenen höheren Fehlerprozente auf einen kleineren prozentualen Anteil an der Gesamtlösung zu beziehen sind.

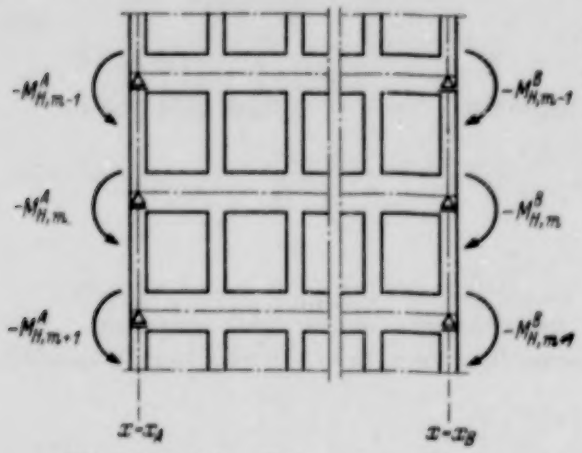

Abb. 9. Umgekehrte Hilfsmomente am gegebenen System.

Bei Systemen mit zwei Riegeln, deren Trägheitsmomente und Systemlinienabstände von der in halber Lichtweite gedachten Schnittlinie gleich sind, d. h. bei denen

$$I_{1,1} = I_{1,2}\,, \qquad b_1 = c_1 = \frac{a_{1,1}}{2}$$

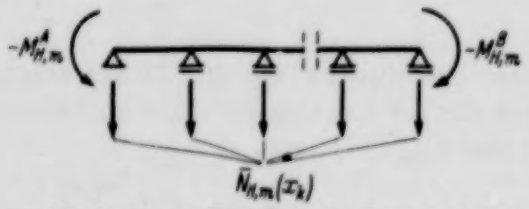

Abb. 10. Durchlaufträger zur Ermittlung der Beanspruchungen aus den Hilfsmomenten.

gilt, verschwinden die Hilfsmomente $M^A_{H,m}$ und $M^B_{H,m}$; die Lösung mit Hilfe des Ersatzsystems bedarf in diesem Falle keiner Zusatzlösung am Durchlaufträger.[1]

Die Biegelinie $y(x)$ der Riegel des Ersatzsystems erhalten wir durch Integration der Kontinuitätsbedingung (34)

$$E\,I_e\,y(x) + \frac{x_B^3\,a_2}{12}\left[\int^x \bar{q}(\eta)\,d\eta + C_3\right] = 0\,. \tag{64}$$

Setzen wir in (64) $\bar{q}(x)$ nach (43) ein, so ergibt sich

$$E\,I_e\,y(x) = -\frac{x_B^3\,a_2}{12}\left[\int^x \bar{q}_p(\eta)\,d\eta + C_3 + \frac{x_B}{\alpha}(C_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\xi + C_2\,\mathfrak{Cos}\,\alpha\xi)\right]. \tag{65}$$

5. Systeme mit gleichen Abmessungen in allen Geschossen als Sonderfall. Die Lösung für diese Systeme erhalten wir durch Spezialisieren der oben abgeleiteten allgemeinen Lösung:

$$\left.\begin{aligned} I_{1,m} &= I_1 && (1 \leqq m \leqq r)\,,\\ I_{2,m} &= I_2\,,\\ I^A_{2,m} &= I^A_2\,,\\ I^B_{2,m} &= I^B_2\,,\\ I^A_{E,m} &= I^A_E\,,\\ I^B_{E,m} &= I^B_E\,,\\ a_{1,m} &= a_1\,,\\ c_m &= c\,,\\ b_m &= b\,,\\ l_{2,m} &= l_2\,, \end{aligned}\right\} \quad (1 \leqq m \leqq r-1)\,. \tag{66}$$

Es wird

$$\sum_{\nu=1}^{r} I_{1,\nu} = r\,I_1\,,$$

und es folgt aus (4) als gegebene Last je Riegel

$$p(x) = \frac{1}{r}\,\bar{p}(x)\,.$$

[1] *H. Beck*, Bauing. 31 (1956), S. 436.

Führen wir die Bezugssteifigkeit $I_e = I_1$ ein, so folgt aus (20)

$$\left.\begin{aligned} M_E(x) &= \overline{M}_E(x) = M_{E,m}(x)\,, \\ M_0(x) &= \overline{M}_0(x) = M_{0,m}(x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Nach (30) und (31) wird

$$\overline{q}_m(x) = \frac{l_2^3\, I_1}{x_B^3\, a_1\, I_2}\, q_m(x)\,, \tag{68}$$

$$\overline{\delta}_{3,m} = \frac{12\, E\, I_1}{x_B^3\, a_1\, a_2}\, \delta_{3,m}\,. \tag{69}$$

Die Kontinuitätsgleichung ist unverändert nach (34) gegeben. Nach (37) und (38) wird

$$\alpha^2 = \frac{r-1}{r}\, \frac{12\, x_B^3\, a_1^3\, I_2}{l_2^3\, a_2\, I_1}\,, \tag{70}$$

$$\gamma = -\frac{1}{r}\, \frac{x_B^3\, a_1^3\, I_2}{l_2^3\, I_1} \sum_{\nu=1}^{r-1} \overline{\delta}_{3,\nu}\,. \tag{71}$$

Mit diesen Konstanten ist die Differentialgleichung unverändert durch (41) gegeben. Das gleiche gilt für die Lösung $\overline{q}(x)$ (43) und die Lamellennormalkräfte $n_m(x)$ (54). Es lautet speziell die Abkürzung $\overline{\varrho}_m$ (47) jetzt

$$\overline{\varrho}_m = \frac{1}{r}\, \frac{a_1^3\, x_B\, I_2}{l_2^3\, I_1} \qquad (2 \leqq m \leqq r-1)\,, \tag{72a}$$

$$\overline{\varrho}_1 = \left(\frac{1}{r} - \frac{b}{a_1}\right) \frac{a_1^3\, x_B\, I_2}{l_2^3\, I_1}\,, \tag{72b}$$

$$\overline{\varrho}_r = \left(\frac{1}{r} - \frac{c}{a_1}\right) \frac{a_1^3\, x_B\, I_2}{l_2^3\, I_1} \tag{72c}$$

und damit ϱ_m nach (53)

$$\varrho_m = \left(\frac{m}{r} - \frac{b}{a_1}\right) \frac{a_1^3\, x_B\, I_2}{l_2^3\, I_1} \qquad (1 \leqq m \leqq r-1) \tag{73}$$

und nach (54d)

$$\sum_{\nu=1}^{m} \delta_{3,\nu}^{\bullet} = \frac{a_1^3\, x_B^3\, I_2}{l_2^3\, I_1} \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \overline{\delta}_{3,\nu} - \frac{m}{r} \sum_{\nu=1}^{r-1} \overline{\delta}_{3,\nu} + \frac{c}{a_1}\, \overline{\delta}_{3,m} \right). \tag{74}$$

6. Systeme ohne Ersatzendpfosten als Sonderfall. Für diese Systeme gilt, wenn sich die Außenpfosten am Riegelende befinden,

$$I_{2,m}^A = I_{2,m}^B = \frac{1}{2}\, I_{2,m}\,. \tag{75}$$

Daraus folgt gemäß (1)

$$I_{E,m}^A = I_{E,m}^B = 0\,. \tag{76}$$

sowie gemäß (3)

$$i_2^A = i_2^B = 0\,. \tag{77}$$

Es entfallen somit auch die Ersatzendpfosten-Querkräfte (6):

$$Q_{E,m}^A = Q_{E,m}^B = 0\,. \tag{78}$$

Folglich sind auch die Hilfsmomente für diesen Sonderfall nicht existent, was sich formal auch aus (52d) und (52f) ergibt, nämlich

$$M_{H,m}^A = M_{H,m}^B = 0\,. \tag{79}$$

Während die Formeln für die Riegelmomente bei durchschnittenen Lamellen infolge äußerer Last gemäß (5) und Lamellennormalkräfte gemäß (11) unverändert Gültigkeit haben, lautet das Riegelmoment aus den Lamellenquerkräften nach (10) jetzt

$$\left.\begin{aligned} M_{q,m}(x) = -\int_x^{x_B} &[b_{m-1}\, q_{m-1}(\eta) + c_m\, q_m(\eta)]\, d\eta + A_{q,m}\,(x_B - x) + B_{q,m} \\ &(1 \leqq m \leqq r\,,\quad q_0(\eta) \equiv 0\,,\quad q_r(\eta) \equiv 0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Konsequente Durchführung dieser Spezialisierung liefert für die bezogenen Pfostenquerkräfte nach (58a) bis (58c) nunmehr

$$\bar{Q}_{P,m}(x_k) = \int_{x_k-\frac{a_2}{2}}^{x_k+\frac{a_2}{2}} \bar{q}_p(x)\,dx - a_2\,\bar{\delta}_{3,m} + a_2\,\lambda\,(C_1\,\mathfrak{Coj}\,\alpha\,\xi_k + C_2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_k)\,, \tag{81a}$$

$$\bar{Q}_{P,m}(x_A) = \int_{x_A}^{x_A+\frac{a_2}{2}} \bar{q}_p(x)\,dx - \frac{a_2}{2}\bar{\delta}_{3,m} + \frac{a_2}{2}\lambda\left[\left(C_1 + C_2\,\mathfrak{Tg}\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B}\right)\mathfrak{Coj}\,\alpha\,\xi_A + \left(C_1\,\mathfrak{Tg}\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B} + C_2\right)\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_A\right], \tag{81b}$$

$$\bar{Q}_{P,m}(x_B) = \int_{x_B-\frac{a_2}{2}}^{x_B} \bar{q}_p(x)\,dx - \frac{a_2}{2}\bar{\delta}_{3,m} + \frac{a_2}{2}\lambda\left[\left(C_1 - C_2\,\mathfrak{Tg}\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B}\right)\mathfrak{Coj}\,\alpha + \left(-C_1\,\mathfrak{Tg}\frac{\alpha\,a_2}{4\,x_B} + C_2\right)\mathfrak{Sin}\,\alpha\right]. \tag{81c}$$

Die tatsächlichen Pfostenquerkräfte $Q_{P,m}$ ergeben sich aus (55). Wegen des Wegfalls der Hilfsmomente entfällt auch die Zusatzlösung am Durchlaufträger. Folglich ist $N_{H,m}(x_k) = 0$ zu setzen, so daß (63) nun lautet

$$N_{P,m}(x_k) = N^*_{P,m}(x_k)\,. \tag{82}$$

Damit ergibt sich für die Normalkräfte gemäß (60a) bis (60c) jetzt

$$N_{P,m}(x_k) = \varrho_m\,x_B\left[\bar{q}_p\left(x_k+\frac{a_2}{2}\right) - \bar{q}_p\left(x_k-\frac{a_2}{2}\right) + \alpha\,\lambda\,\frac{a_2}{x_B}\,(C_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\xi_k + C_2\,\mathfrak{Coj}\,\alpha\,\xi_k)\right], \tag{83a}$$

$$N_{P,m}(x_A) = \varrho_m\,x_B\left[\bar{q}_p\left(x_A+\frac{a_2}{2}\right) + C_1\,\mathfrak{Coj}\left\langle\alpha\left(\xi_A+\frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle + C_2\,\mathfrak{Sin}\left\langle\alpha\left(\xi_A+\frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle\right] - \sum_{\nu=1}^{m}\delta^*_{3,\nu}, \tag{83b}$$

$$N_{P,m}(x_B) = -\varrho_m\,x_B\left[\bar{q}_p\left(x_B-\frac{a_2}{2}\right) + C_1\,\mathfrak{Coj}\left\langle\alpha\left(1-\frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle + C_2\,\mathfrak{Sin}\left\langle\alpha\left(1-\frac{a_2}{2\,x_B}\right)\right\rangle\right] + \sum_{\nu=1}^{m}\delta^*_{3,\nu}. \tag{83c}$$

7. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit ist ein Verfahren zur angenäherten Berechnung regelmäßig gegliederter Scheiben entwickelt. Dabei wird von der Regelmäßigkeit der gegebenen Systeme und der dadurch bedingten Vielzahl gleichartiger statisch unbestimmter Größen ausgegangen und auf Grund mechanischer Überlegungen das gegebene Rahmensystem durch ein Kontinuum ersetzt. Die inneren Kräfte des Ersatzkontinuums sind mit den üblichen mathematischen Methoden ermittelt; es ist gelungen, alle im Ersatzkontinuum unbekannten Größen auf eine einzige unbekannte Funktion zurückzuführen, die sich aus einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt. Die gesuchten statisch Überzähligen des gegebenen Rahmensystems erhält man durch Integration der entsprechenden Größen des Ersatzkontinuums. Während die herkömmlichen Methoden der Rahmenstatik die Lösung linearer Gleichungssysteme mit hoher Gleichungsanzahl erfordern, bedarf das vorliegende Näherungsverfahren nur der Lösung einer Differentialgleichung von bekanntem Typus.

Bei der im heutigen Bauen zunehmenden Verwendung regelmäßig gegliederter flächenhafter Fassaden liegt die Bedeutung des hier entwickelten Verfahrens darin, daß für derartige Systeme mit gleichen äußeren Lagerungs- und Belastungsbedingungen die statisch überzähligen Größen mittels Formeln angegeben werden können, worin die speziellen Systemabmessungen als Parameter eingehen. Für die praktische Handhabung werden Gebrauchsformeln für die am häufigsten vorkommenden Lagerungs- und Belastungsfälle an anderer Stelle mitgeteilt.

(Eingegangen am 20. Dezember 1957.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *Hubert Beck*, Frankfurt am Main, Hermannstr. 31.

Turbulente Ausbreitung runder Heißluftstrahlen in bewegter Luft

(Erster Teil: Kernbereich)

Von W. Szablewski

1. Einleitung. Grundlage der Untersuchung bildet das im Jahre 1947 aufgestellte Gleichungssystem[1] zur Berechnung turbulenter Strömungen von Gasen stark veränderlicher Dichte. In einer kürzlich erschienenen Veröffentlichung[2] habe ich als Vorstufe der vorliegenden Arbeit die turbulente Vermischung ebener Heißluftstrahlen, die zunächst durch eine Scheidewand getrennt sind und sich dann mischen, für Unterschallströmung berechnet. Dieses Modell wird durch das in unmittelbarer Nähe der Düsenkante befindliche Mischungsfeld eines Düsenstrahls der Machzahl kleiner als Eins mit dem umgebenden Medium realisiert und liefert mathematisch die Ausgangsposition (Anfangsprofile) für das in der Arbeit anzuwendende Fortsetzungsverfahren zur Lösung des Systems nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, die das Mischungsfeld des Düsenstrahls in Strahlenkoordinaten, die dem Ausbreitungsvorgang angepaßt sind, beschreiben.

Historisch ist anzumerken, daß mit Beschränkung auf Felder konstanter Dichte die turbulente Ausbreitung eines runden Düsenstrahls in ruhender Luft erstmalig von *A. M. Kuethe*[3] berechnet wurde. Es folgten dann *H. B. Squire* und *J. Trouncer*[4], die in die Untersuchung auch den Fall bewegter Außenluft miteinbezogen. Fußend auf der Grundlage des Prandtlschen Mischungswegansatzes, wurde von den genannten Autoren methodisch so vorgegangen, daß eine plausible Funktion der Geschwindigkeitsverteilung über der Strahlbreite angenommen wurde, mit der man dann in den Impulsintegralsatz einging. Auf diese Weise wird das Problem zurückgeführt auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die das Feld festlegenden Funktionen der Mischbreite und der Kontur des Strahlkerns[5]. Es handelt sich also um ein Verfahren, das im Prinzip analog ist dem bekannten Pohlhausen-Verfahren in der Theorie der laminaren Grenzschichten.

Demgegenüber ist das in der vorliegenden Arbeit zur Anwendung kommende Fortsetzungsverfahren, bei dem wir, ausgehend von den Anfangsprofilen, mittels des Systems von Differentialgleichungen das Feld in Differenzenschritten approximativ aufbauen, als exaktes Verfahren anzusprechen. Ein Differenzenverfahren ist in jüngster Zeit auch von *S. J. Pai*[6] für die Berechnung der laminaren Ausbreitung von heißen Düsenstrahlen in Beispielen angewandt worden, wobei als eine der unabhängigen Variablen die Stromfunktion benutzt wird. Zum Rechengang selbst, z. B. über die Größe der Differenzenschritte, wurden dabei keine Angaben gemacht. Das von *Pai* formulierte Gleichungssystem für die turbulenten Mischungsfelder von Gasen stark veränderlicher Dichte, das von unserem Gleichungssystem wesentlich verschieden ist (vgl. Arbeit II), ergibt für das Problem der turbulenten Ausbreitung formal dieselben Differentialgleichungen wie bei der laminaren Ausbreitung, so daß die dort gewonnenen Ergebnisse auf die turbulente Ausbreitung übertragen werden können. Ein Beispiel einer derartigen Übertragung ist jedoch noch nicht mitgeteilt worden.

In der Durchführung des Fortsetzungsverfahrens haben wir uns für den Kernbereich mit drei Schritten begnügt. Diese Beschränkung wird nahegelegt durch die sich aus bisherigen Forschungen[7] ergebende Feststellung, daß innerhalb des hier untersuchten Kernbereiches die Isotachen und Isothermen nur schwach gekrümmt verlaufen bzw. die Profile der Geschwindigkeit und Temperatur in Strahlenkoordinaten nur eine geringe Verschiebung vom Ausgangsprofil erfahren und fast inzidieren. Unsere Rechnung ergibt denn auch, daß für die Erfassung des Kernbereiches praktisch sogar schon zwei Schritte als ausreichend anzusehen sind.

Die Untersuchung beschränkt sich auf den Kernbereich, d. h. auf den Bereich des Mischungsfeldes, der durch das Vorhandensein eines Strahlkerns gekennzeichnet ist, der durch die Vermischung noch nicht berührt ist. Wir werden dabei gemäß dem Umstand, daß die Temperatur des

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 67.

[2] *W. Szablewski*, Ing.-Archiv. 25 (1957), S. 10; diese Arbeit wird im folgenden als Arbeit II zitiert.

[3] *A. M. Kuethe*, Journ. Appl. Mech. 2 (1935), S. 87.

[4] *H. B. Squire* and *J. Trouncer*, British ARC R and M 1974 (1944).

[5] Hierher gehören auch die älteren, unter stark vereinfachenden Annahmen durchgeführten Arbeiten des Verf. über Felder konstanter und veränderlicher Dichte: *W. Szablewski*, U. u. M. 8003 (1944) bzw. NACA TM 1311 (1951); sowie Göttinger Dissertation 1947 bzw. NACA TM 1288 (1950).

[6] *S. J. Pai*, Journ. Aeron. Sci. 16 (1949), S. 463; Quarterly Appl. Mathem. 10 (1952), S. 141.

[7] Vgl. z. B. *A. M. Kuethe* a. a. O.; ferner *O. Pabst*, U. u. M. 8004 (1944).

Düsenstrahls nach den Seiten stärker ausgebreitet wird als seine Geschwindigkeit, für das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld voneinander verschiedene Kernbereiche zu unterscheiden haben. Grenzschichteinflüsse der Düsenwandung bleiben außer acht, und die Profile der Temperatur und Geschwindigkeit in der Ebene der Düsenmündung werden als rechteckig angenommen. Die Machzahl des Düsenstrahls wird, wie schon erwähnt, kleiner als Eins vorausgesetzt.

Schließlich bemerken wir noch, daß wir hier nur den Fall bewegter Außenluft betrachten. Der Fall ruhender Außenluft, der die ganze Untersuchung abschließen wird, soll in einer nächsten Abhandlung folgen. Er erfordert gegenüber den anderen hier behandelten Fällen eine wesentlich größere numerische Genauigkeit und scheint auch sonst Abweichungen vom Verhalten dieser Fälle zu zeigen. Diese Gründe ließen es geboten erscheinen, den Fall ruhender Außenluft besonders zu behandeln.

2. Gleichungssystem. Das turbulente rotationssymmetrische, im zeitlichen Mittel stationäre, Mischungsfeld (Abb. 1) wird unter der Voraussetzung konstanten Drucks durch folgende Gleichungen[1] beschrieben:

Impuls:

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}\,\bar{v}}{\partial r} = \varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\bar{\varrho}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + E\,r\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial r}\right), \qquad (1)$$

Energie:

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}\,\overline{c_p T}}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{v}\,\overline{c_p T}}{\partial r} = E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \bar{\varrho}\,\overline{c_p T}}{\partial r}\right), \qquad (2)$$

Masse:

$$\frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial r\,\bar{\varrho}\,\bar{v}}{\partial r} = E\,\varepsilon(x)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial r}\right). \qquad (3)$$

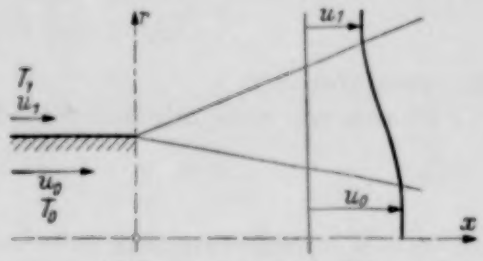

Abb. 1. Geschwindigkeitsfeld.

Hierbei bedeuten x, r Zylinderkoordinaten, u bzw. v die Geschwindigkeitskomponenten in der x- bzw. r-Richtung, ϱ die Dichte, T die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck; E ist eine empirische Zahl, die das Übertragungsverhältnis von substantiellen Eigenschaften und der (Druckschwankungen während des Transports ausgesetzten) Geschwindigkeit beim turbulenten Austausch angibt. Das Überstreichen bedeutet zeitliche Mittelwerte; im folgenden werden wir die Querstriche fortlassen.

Die scheinbare kinematische Zähigkeit wird durch

$$\varepsilon(x) = \varkappa_1\,b_1(x)\,(u_0 - u_1) \qquad (u_0 > u_1) \qquad (4)$$

beschrieben, wo $b_1(x)$ die Mischbreite des Geschwindigkeitsfeldes, $\varkappa_1$ ein empirischer Koeffizient, u_0 bzw. u_1 die Geschwindigkeit des Düsenstrahls bzw. der Außenluft bedeuten. Entsprechend bezeichnen im folgenden T_0 bzw. T_1 die Temperatur des Düsenstrahls bzw. der Außenluft.

Die Größe c_p wird als Konstante angesehen. Mit der Zustandsgleichung für ideale Gase bei konstantem Druck

$$\varrho \cdot T = \text{konst.} \qquad (5)$$

ersetzen wir ϱ durch ϑ, wo $\vartheta = T - T_1$:

$$\varrho = \frac{\text{konst.}}{T} = \frac{\text{konst.}}{T_1}\,\frac{1}{1 + \vartheta/T_1}.$$

Führen wir die dimensionslosen Funktionen $\varphi = (u - u_1)/(u_0 - u_1)$ sowie $\chi = \vartheta/\vartheta_0$, wo $\vartheta_0 = T_0 - T_1$, ein und machen die Längen mit dem Düsenradius r_0 dimensionslos, so können wir unter Beachtung von (3) das Gleichungssystem (1) bis (3) auch schreiben:

Impuls:

$$\frac{r/r_0}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi}\left[\left(\frac{u_0 - u_1}{u_0}\,\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x/r_0} + \frac{v}{u_0}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r/r_0}\right]$$
$$= \varepsilon_1(x)\left[\frac{\partial}{\partial r/r_0}\left(\frac{r/r_0}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r/r_0}\right) - E\,\frac{r}{r_0}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r/r_0}\,\frac{\vartheta_0/T_1}{(1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi)^2}\,\frac{\partial \chi}{\partial r/r_0}\right], \qquad (6)$$

Energie:

$$\frac{r/r_0}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi}\left[\left(\frac{u_0 - u_1}{u_0}\,\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)\frac{\partial \chi}{\partial x/r_0} + \frac{v}{u_0}\,\frac{\partial \chi}{\partial r/r_0}\right]$$
$$= E\,\varepsilon_1(x)\left[\frac{\partial}{\partial r/r_0}\left(\frac{r/r_0}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi}\,\frac{\partial \chi}{\partial r/r_0}\right) - \frac{r}{r_0}\,\frac{\partial \chi}{\partial r/r_0}\,\frac{\vartheta_0/T_1}{(1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi)^2}\,\frac{\partial \chi}{\partial r/r_0}\right], \qquad (7)$$

[1] Vgl. Arbeit II.

Masse:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x/r_0}\left[\frac{r/r_0}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi}\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\,\varphi+\frac{u_1}{u_0}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial r/r_0}\left(\frac{r/r_0}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi}\,\frac{v}{u_0}\right) \\ = E\,\varepsilon_1(x)\,\frac{\partial}{\partial r/r_0}\left(-\frac{r}{r_0}\,\frac{\vartheta_0/T_1}{(1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi)^2}\,\frac{\partial\chi}{\partial r/r_0}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

mit

$$\varepsilon_1(x)=\varkappa_1\frac{b_1}{r_0}\,\frac{u_0-u_1}{u_0}\,.$$

Da wir es mit einem Ausbreitungsvorgang zu tun haben, ist es zweckmäßig, auf Strahlenkoordinaten

$$\eta=\frac{r-r_0}{x} \tag{9}$$

mit

$$(\partial/\partial r)_x=\frac{1}{x}\,(\partial/\partial\eta)_x\,,\qquad (\partial/\partial x)_r=(\partial/\partial x)_\eta-\frac{\eta}{x}\,(\partial/\partial\eta)_x$$

zu transformieren.

Führen wir noch mit dem Streckungsfaktor

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\,\varkappa_1\,c_1\,(u_0-u_1)/u_0}}\,, \tag{10}$$

wo $c_1=b_1/x$, die Variablen $\xi=\frac{1}{\sigma}\,\frac{x}{r_0}$ sowie $y=\sigma\,\eta$ ein und schreiben $\psi=\sigma\,\frac{v}{u_0}$, so erhalten wir schließlich folgendes Gleichungssystem:

Impuls:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left\{2\left[\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\,\varphi+\frac{u_1}{u_0}\right)y-\psi\right]-\underline{(E+1)\,\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\partial\chi/\partial y}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi}}+\frac{\xi}{1+\xi\,y}\right\}-2\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\,\varphi+\frac{u_1}{u_0}\right)\xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=0\,, \tag{11}$$

Energie:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\left\{\frac{2}{E}\left[\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\,\varphi+\frac{u_1}{u_0}\right)y-\psi\right]-\underline{2\,\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\partial\chi/\partial y}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi}}+\frac{\xi}{1+\xi\,y}\right\}-\frac{2}{E}\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\,\varphi+\frac{u_1}{u_0}\right)\xi\,\frac{\partial\chi}{\partial\xi}=0\,, \tag{12}$$

Masse:

$$\frac{u_0-u_1}{u_0}\left(\xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-y\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\psi\,\frac{\xi}{1+\xi\,y}=0\,. \tag{13}$$

Gegenüber dem Feld konstanter Dichte treten die unterstrichenen Glieder zusätzlich auf.

Dabei haben wir vorausgesetzt, daß

$$\sigma(x)=\text{konst.} \tag{14}$$

In Anbetracht dessen, daß man über den nach (10) in σ enthaltenen empirischen Koeffizienten $\varkappa_1$ derzeit noch nicht viel sagen kann, ob es sich etwa um eine Konstante universellen Charakters handelt oder auch nur um eine Modellkonstante, erscheint diese Annahme hier als die vernünftigste. Man kann sie so lesen, daß für das Mischungsfeld des Kernbereiches $\varkappa_1$ und b_1/x als konstant angesehen werden. Beides ist für den Kernbereich als in guter Näherung zutreffend anzusehen; denn beide Annahmen werden durch die experimentelle[1] und theoretische (vgl. Abb. 16) Feststellung gerechtfertigt, daß die Geschwindigkeitsprofile in Strahlenkoordinaten fast inzidieren, so daß also tatsächlich $\sigma(x)$ im Kernbereich bis auf einen kleinen Fehler als konstant angesehen werden kann[2].

Die Randbedingungen für eine Lösung unseres Gleichungssystems (11) bis (13) im Kernbereich lauten bei Beachtung, daß die Strahlachse die Strahlenkoordinate $\eta=-1/(x/r_0)$ bzw. $y=-1/\xi$ hat,

$$\varphi\to\begin{cases}1\\0\end{cases}\quad\text{für}\quad\begin{cases}y\to-\dfrac{1}{\xi}\\ y\to\infty\end{cases}\,, \tag{15}$$

$$\chi\to\begin{cases}1\\0\end{cases}\quad\text{für}\quad\begin{cases}y\to-\dfrac{1}{\xi}\\ y\to\infty\end{cases}\,. \tag{16}$$

[1] *O. Pabst*, U. u. M. 8004 (1944).

[2] Strenge Inzidenz würde besagen, daß erstens $b_1\sim x$ und daß zweitens die Profile sich ähnlich verhalten bzw. daß $\varkappa_1=\text{const}$. Denselben Schluß kann man auch bei einer Parallelversetzung der Profile ziehen; als Ähnlichkeitskoordinate fungiert dann $\eta^*=\frac{r/r_0-d/r_0}{b/r_0}\sim\left(\eta+\frac{1-d/r_0}{b/r_0}\right)$, wo die Funktion $d(x)$ die Kontur des Strahlkerns beschreibt.

Die jeweils erstere Annahme besagt, daß ein Strahlkern noch vorhanden ist. Wie schon eingangs erwähnt, werden wir zwei voneinander verschiedene Kernbereiche des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes zu unterscheiden haben. Das Geschwindigkeitsfeld wird dabei eine größere Kernlänge haben als das Temperaturfeld; wollen wir das Temperaturfeld auch noch über seinen Kernbereich hinaus, dabei aber immer noch innerhalb des Kernbereiches des Geschwindigkeitsfeldes, berechnen, so ist die erstere Randbedingung in (16) zu modifizieren gemäß dem Umstand, daß hier bereits die Temperatur längs der Strahlachse abfällt; vgl. (48).

Weiter ist auf der Strahlachse Verschwinden der Querkomponente der Geschwindigkeit anzunehmen, was die Randbedingung

$$\psi \to 0 \qquad \text{für} \qquad y \to -\frac{1}{\xi} \tag{17}$$

ergibt.

Für die Düsenmündung mit $\xi = 0$ ergibt (11) bis (13) die Gleichungen

$$\varphi_0'' + \varphi_0' \left\{ 2 \left[\left(\frac{u_0 - u_1}{u_0} \varphi_0 + \frac{u_1}{u_0} \right) y - \psi_0 \right] - (E+1) \frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_0'}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi_0} \right\} = 0\,, \tag{18}$$

$$\chi_0'' + \chi_0' \left\{ \frac{2}{E} \left[\left(\frac{u_0 - u_1}{u_0} \varphi_0 + \frac{u_1}{u_0} \right) y - \psi_0 \right] - 2 \frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_0'}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi_0} \right\} = 0\,, \tag{19}$$

$$-\frac{u_0 - u_1}{u_0} y\, \varphi_0' + \psi_0' = 0\,. \tag{20}$$

Das ist gerade das Gleichungssystem, das die turbulente Vermischung zweier ebener Heißluftstrahlen beschreibt, die zunächst durch eine Scheidewand getrennt sind und sich dann mischen, und das wir in der Arbeit II gelöst haben. Dieser Arbeit können wir also die dort berechneten Profile der Geschwindigkeit bzw. Temperatur φ_0, ψ_0 bzw. χ_0 als Anfangsprofile entnehmen:

Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\xi, y) &\to \varphi_0(y) \\ \chi(\xi, y) &\to \chi_0(y) \\ \psi(\xi, y) &\to \psi_0(y) \end{aligned}\right\} \qquad \text{für} \qquad \xi \to 0\,. \tag{21}$$

Was die empirischen Koeffizienten der Theorie betrifft, so setzen wir für das Übertragungsverhältnis, wie in Arbeit II,

$$E = 2\,. \tag{22}$$

Nach (10) haben wir für den Streckungsfaktor σ die Gleichung

$$\sigma = \frac{1}{2\,\varkappa_1\,(\sigma\, c_1)\,(u_0 - u_1)/u_0}\,.$$

Gemäß unserer für den Kernbereich getroffenen Annahme (14) $\sigma(x) =$ konst. können wir dann $\sigma(x)$ der Arbeit II $\big(\sigma = \sigma(0)\big)$ entnehmen. Dort hatten wir die Breite $\sigma\, c_1$ der Geschwindigkeitsverteilung im y-Maßstab zwischen den Grenzen 0,95 und 0,05 der berechneten Verteilungen abgelesen. Der Vergleich mit den Messungen von *O. Pabst*[1] ergab dann für den empirischen Koeffizienten $\varkappa_1$ den Zahlenwert $\varkappa_1 = 0{,}0082$.

3. Fortsetzungsverfahren. Zur Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen (11) bis (13) mit den Randbedingungen (15) bis (17) und den Anfangsbedingungen (21) sind wir auf Differenzenrechnung angewiesen. Bei dem hier in Anwendung kommenden Fortsetzungsverfahren berechnen wir, mit Start von den Anfangsprofilen (21), schrittweise das Mischungsfeld. Wir begnügen uns dabei, wie schon in der Einleitung erwähnt, für die Berechnung des Kernbereiches auf drei Schritte für das Geschwindigkeitsfeld, während man für das Temperaturfeld bereits in zweien der hier vollzogenen Schritte den Kernbereich durchmessen hat.

Zur Charakteristik des Verfahrens ist zu sagen, daß der erste Schritt die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert, die wir mittels Iteration gewinnen. Die nächsten Schritte erfordern dann nur noch Quadraturen. Allerdings steigert sich mit jedem weiteren Schritt der Formalismus, bedingt durch die notwendige Bildung immer höherer Ableitungen der Ausgangsfunktionen, ganz erheblich.

Was die für den Erhalt glatt verlaufender Kurven der Verteilungsfunktionen in grafischer Auftragung erforderliche numerische Genauigkeit betrifft, so hat sich ergeben, daß die Ansprüche mit jedem weiteren Fortsetzungsschritt steigen; des weiteren wachsen die Ansprüche mit größer

[1] *O. Pabst*, a. a. O.

werdendem Geschwindigkeitsparameter $(u_0-u_1)/u_0$, bedingt durch die schwächer werdende Konvergenz[1] der Profile (21) für $y \to \infty$.

Im folgenden berechnen wir die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder im Kernbereich für die Geschwindigkeitsparameter $(u_0-u_1)/u_0 \approx 0, = 0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75$ und die Temperaturparameter $\vartheta_0/T_1 = 0,\ 1,\ 2$.

a) Erster Fortsetzungsschritt. Für den ersten Schritt benötigen wir die Ableitungen $(\partial\varphi/\partial\xi)_{\xi=0}$ bzw. $(\partial\chi/\partial\xi)_{\xi=0}$ bzw. $(\partial\psi/\partial\xi)_{\xi=0}$, bezeichnet mit Φ_0 bzw. X_0 bzw. Ψ_0.

Aus den Gleichungen (11), (12) lassen sich Φ_0, X_0 nicht direkt ermitteln, da diese Gleichungen sich für $\xi = 0$ auf die Gleichungen der Anfangsprofile (21) reduzieren. Durch Differentiieren von (11) nach ξ, wobei wir die Existenz und die Vertauschbarkeit der auftretenden Ableitungen als gesichert unterstellen, erhalten wir jedoch unter Beachtung von (18) folgende Bestimmungsgleichung für Φ_0:

$$\Phi_0'' + \Phi_0'\left(-\frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right) + \varphi_0'\left[2\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\Phi_0 y - \Psi_0\right) - (E+1)\left(\frac{(\vartheta_0/T_1)X_0}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi_0}\right)' + 1\right] - 2\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_0 + \frac{u_1}{u_0}\right)\Phi_0 = 0\,. \tag{23}$$

Dabei bezeichnen im folgenden die Striche Ableitungen nach y. Gemäß den Randbedingungen (15) ist von der Lösung asymptotisches Verschwinden zu verlangen, also

$$\Phi_0 \to 0 \qquad \text{für} \quad y \to \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}. \tag{24}$$

Entsprechend erhalten wir durch Differentiation von (12) nach ξ unter Beachtung von (19) für X_0 die Gleichung

$$X_0'' + X_0'\left(-\frac{\chi_0''}{\chi_0'}\right) + \chi_0'\left[\frac{2}{E}\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\Phi_0 y - \Psi_0\right) - 2\left(\frac{(\vartheta_0/T_1)X_0}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi_0}\right)' + 1\right] - \frac{2}{E}\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_0 + \frac{u_1}{u_0}\right)X_0 = 0 \tag{25}$$

mit den aus (16) folgenden Randbedingungen

$$X_0 \to 0 \qquad \text{für} \quad y \to \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}. \tag{26}$$

Schließlich erhalten wir durch Differentiieren von (13) nach ξ

$$\frac{u_0-u_0}{u_0}(\Phi_0 - y\,\Phi_0') + \Psi_0' + \psi_0^{\varepsilon} = 0\,,$$

woraus unter Beachtung der sich aus (17) ergebenden Randbedingung

$$\Psi_0 \to 0 \quad \text{für} \quad y \to -\infty \tag{27}$$

durch Integration

$$\Psi_0' = -\int_{-\infty}^{y}\psi_0\,dy + \frac{u_0-u_1}{u_0}\left(y\,\Phi_0 - 2\int_{-\infty}^{y}\Phi_0\,dy\right) \tag{28}$$

folgt.

Zur Lösung des Gleichungssystems (23), (25) unter den Randbedingungen (24), (26) haben wir den Weg der Iteration gewählt. Wir bringen zu diesem Zweck (23), (25) zunächst auf eine zweckmäßige Form.

Dividiert man Gleichung (23) durch φ_0', so erhält man mit

$$\frac{1}{\varphi_0'}\left[\Phi_0'' + \Phi_0'\left(\frac{-\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\right] = \left(\frac{\Phi_0'}{\varphi_0'}\right)'$$

durch zweimalige formale Integration von (23) unter Beachtung von (28) die Gleichung

$$\Phi_0 = \int_{-\infty}^{y}\varphi_0'\left\{(E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)X_0}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi_0} - y - 2\int_0^{y}\left[\int_{-\infty}^{\beta}\psi_0\,dx + 2\frac{u_0-u_1}{u_0}\int_{-\infty}^{\beta}\Phi_0\,dx - \left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_0 + \frac{u_1}{u_0}\right)\frac{\Phi_0}{\varphi_0'}\right]d\beta\right\}dy + F_1(\varphi_0 - 1)\,, \tag{29}$$

[1] Vgl. Arbeit II, S. 14, Fußnote.

die in ihrer Formulierung bereits die erste der Randbedingungen (24) erfüllt. Die Integrationskonstante F_1 ist so zu bestimmen, daß noch die zweite der Randbedingungen (24) $\Phi_0 \to 0$ für $y \to \infty$ erfüllt wird.

Entsprechend erhält man aus (25) die Gleichung

$$X_0 = \int_{-\infty}^{y} \chi_0' \left\{ 2 \frac{(\vartheta_0/T_1)\, X_0}{1 + (\vartheta_0/T_1)\, \chi_0} - y \right.$$

$$\left. - \frac{2}{E} \int_0^y \left[\int_{-\infty}^{\beta} \psi_0 \, dx + 2 \frac{u_0 - u_1}{u_0} \int_{-\infty}^{\beta} \Phi_0 \, dx - \left(\frac{u_0 - u_1}{u_0} q_0 + \frac{u_1}{u_0} \right) \frac{X_0}{\chi_0'} \right] d\beta \right\} dy + G_1 (\chi_0 - 1) \quad (30)$$

unter formaler Erfüllung der ersten der Randbedingungen (26). Die Integrationskonstante G_1 ist wiederum so zu bestimmen, daß $X_0 \to 0$ für $y \to \infty$.

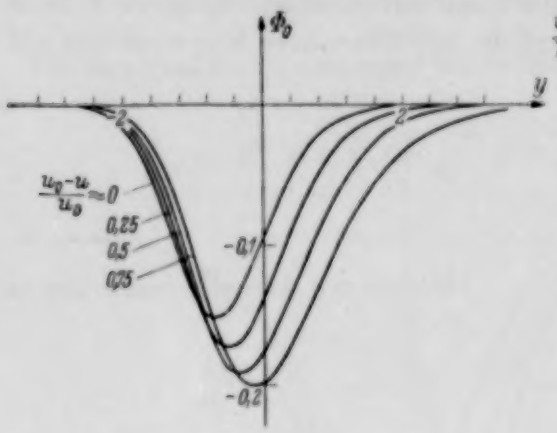

Abb. 2.

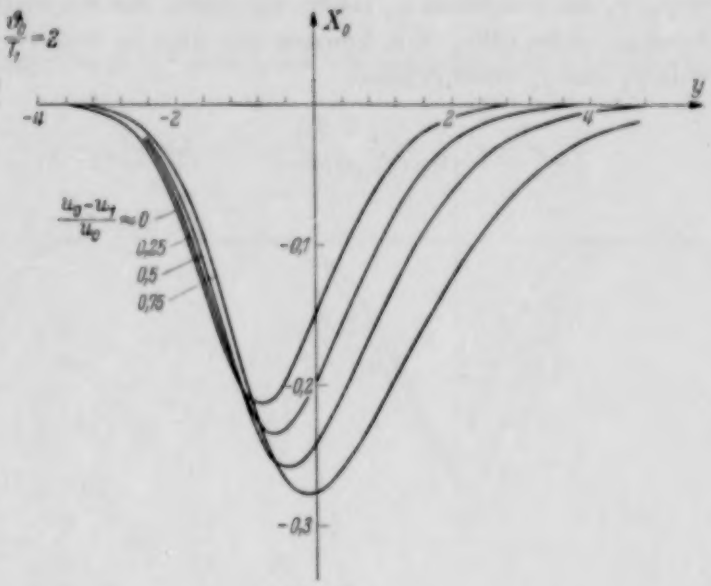

Abb. 3.

Die in (29) und (30) auftretenden Funktionen φ_0, φ_0' und χ_0, χ_0' sowie ψ_0 haben wir, wie bereits erwähnt, in der Arbeit II berechnet.

Drr Erfolg eines iterativen Rechenganges — Konvergenz und Arbeitsaufwand — ist natürlich weitgehend abhängig von der Wahl der Eingangsfunktionen $\Phi_0^{(0)}$, $X_0^{(0)}$.

In dieser Hinsicht bietet einen wichtigen Hinweis der Fall $(u_0 - u_1)/u_0 \approx 0$. Hier haben wir, wie man am einfachsten durch Einsetzen in die Gleichungen (23), (25) verifiziert, die exakten Lösungen[1]

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{4} \varphi_0' \qquad \text{für} \quad \frac{\vartheta_0}{T_1} = 0\,, \\ X_0 &= \frac{1}{2} \chi_0' \qquad \text{für} \quad \frac{\vartheta_0}{T_1} \quad \text{beliebig.} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Das führte uns allgemein zu dem Ansatz für die Eingangsfunktionen

$$\Phi_0^{(0)} = A \varphi_0', \qquad X_0^{(0)} = B \chi_0',$$

wobei die Koeffizienten A, B durch Eingang mit obigem Ansatz in (29) bzw. (30) und Kollokation an der $\varphi_{0\,max}'$ bzw. $\chi_{0\,max}'$ entsprechenden Stelle y bestimmt wurden.

Mit den so bestimmten Eingangsfunktionen führte der Iterationsgang nach (29), (30), wobei zwischen den einzelnen Gängen noch gemittelt wurde, in den Fällen $(u_0 - u_1)/u_1 \approx 0$, $= 0{,}25$, $0{,}50$ nach 3—4 Iterationen zum Ziel, d. h. die Rechnung kam in der grafischen Auftragung eines DIN A 4-Blattes zum Stillstand. Für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}75$ wurden die Eingangsfunktionen durch Extrapolation gewonnen; hier benötigte man 4 bis 5 Iterationen.

Wir können an dieser Stelle die berechneten Funktionen nur im Auszug wiedergeben. Abb. 2 und 3 zeigen für $\vartheta_0/T_1 = 2$ als Beispiel den Gang der Funktionen Φ_0, X_0 mit dem Parameter

[1] Hier ist (vgl. Ing.-Arch. 20 (1952), S. 73) $\varphi_0' = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$; $(\vartheta_0/T_1)\,\chi_0' = -\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{e^{-y^{*2}}}{(\alpha\, \Phi(y^*) + \beta)^2}$ mit $y^* = y/\sqrt{E}$ und der Fehlerintegralfunktion $\Phi(y^*)$.

$(u_0 - u_1)/u_0$. Die in Erscheinung tretende Rechtsversetzung der Kurven war zu erwarten, da sie der Rechtsversetzung der Anfangsprofile φ_0, χ_0 mit dem Parameter $(u_0 - u_1)/u_0$ entspricht (vgl. Arbeit II).

Abb. 4 und 5 wiederum für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5$ als Beispiel zeigen eine mit dem Parameter ϑ_0/T_1 gehende Linksversetzung der Kurven, die dem analogen Verhalten der Anfangsprofile entspricht (vgl. Arbeit II). Des weiteren weist der mit ϑ_0/T_1 wachsende Betrag der Funktionen auf die mit größerer Temperaturdifferenz zu erwartende stärkere Krümmung der Isotachen und Isothermen hin.

Wir können nunmehr, ausgehend von den Anfangsprofilen φ_0 und χ_0, den ersten Fortsetzungsschritt durchführen und erhalten mit der Schrittweite a approximativ die Profile

$$\varphi_1 = \varphi_0 + a\,\Phi_0\,, \qquad \chi_1 = \chi_0 + a\,X_0\,. \tag{32}$$

Das Profil der Querkomponente der Geschwindigkeit ψ_1 an der Stelle $\xi = a$ ermitteln wir nun nicht etwa in entsprechender Weise mittels Ψ_0. Vielmehr ist, wie wir unten zeigen, bei vorliegenden Profilen φ_1, χ_1 die Funktion ψ_1 eindeutig durch diese bestimmt und mittels einer expliziten Formel berechenbar, siehe (38). Wir können uns also in bezug auf die approximative Konstruktion auf die Profile φ_1 und χ_1 beschränken.

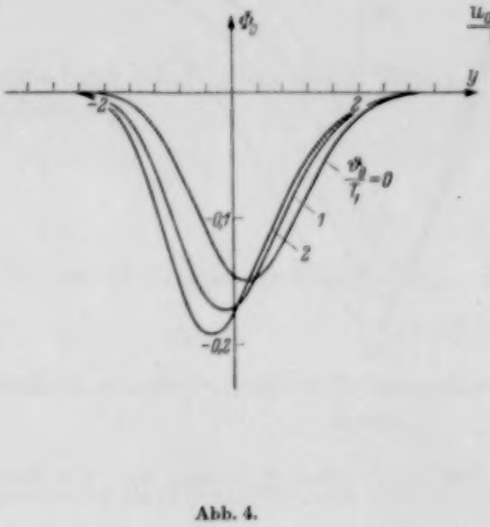

Abb. 4.

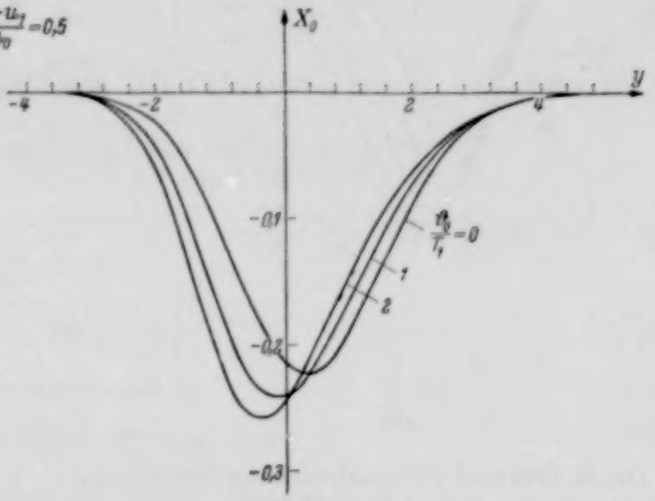

Abb. 5.

In der vorliegenden Rechnung haben wir die Schrittweite a in Hinsicht auf überschläglich ermittelte Kernlängen ($\xi \approx 0{,}45$) mit $a = 0{,}2$ bemessen.

b) Weitere Fortsetzungsschritte. Nach Vollzug der ersten Fortsetzung lassen sich die weiteren Fortsetzungen mittels expliziter Formeln, die bei der numerischen Auswertung nur Quadraturen erfordern, gewinnen.

Zunächst stellen wir fest, daß wir mit der aus (13) durch Integration zu gewinnenden Formel

$$\psi = \frac{u_0 - u_1}{u_0}\,\frac{1}{1+\xi\,y}\int_{-1/\xi}^{y}(1+\xi\,y)\left(y\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)dy\,, \tag{33}$$

welche die Randbedingung (17) erfüllt, aus Gleichung (11) die Funktion ψ eliminieren können.

Liegen nun an einer Stelle $\xi \neq 0$ die Profile φ, χ vor, so erhalten wir durch Einsetzen von (33) in (11) und Umordnung die Gleichung

$$(1+\xi\,y)\left\{\varphi'' + \varphi'\left[-(E+1)\,\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi'}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi} + \frac{\xi}{1+\xi\,y}\right]\right\}$$
$$+\,2\left\{(1+\xi\,y)\left(y\,\varphi' - \xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\,\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right) - \frac{u_0-u_1}{u_0}\,\varphi'\int_{-1/\xi}^{y}(1+\xi\,y)\left(y\,\varphi' - \xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)dy\right\} = 0$$

oder

$$(1+\xi y)\left\{\varphi'' + \varphi'\left[-(E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)\chi'}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi} + \frac{\xi}{1+\xi y}\right]\right\}$$
$$+ 2\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\int_{-1/\xi}^{y}(1+\xi y)\left(y\varphi' - \xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)dy}{\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)}\right] = 0\,,$$

aus der durch Integration, bei Wiedereinsetzen von ψ gemäß (33) und Erfüllung der Randbedingung (17) folgt

$$\psi = -\frac{1}{2}\frac{u_0-u_1}{u_0}\frac{\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi + \frac{u_1}{u_0}}{1+\xi y}\int_{-1/\xi}^{y}\frac{(1+\xi y)\left\{\varphi'' + \varphi'\left[-(E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)\chi'}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi} + \frac{\xi}{1+\xi y}\right]\right\}}{\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)^2}dy\,. \qquad (34)$$

Die den Profilen φ, χ entsprechende Funktion $\partial\varphi/\partial\xi$ gewinnen wir dann für $\xi \neq 0$ leicht aus (11) zu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\varphi'' + \varphi'\left\{2\left[\left(\frac{u_0-u_1}{u_1}\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)y - \psi\right] - (E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)\chi'}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi} + \frac{\xi}{1+\xi y}\right\}}{2\xi\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)}. \qquad (35)$$

Entsprechend erhalten wir aus (12)

$$\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = \frac{\chi'' + \chi'\left\{\frac{2}{E}\left[\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)y - \psi\right] - 2\frac{(\vartheta_0/T_1)\chi'}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi} + \frac{\xi}{1+\xi y}\right\}}{\left(\frac{2}{E}\right)\xi\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi + \frac{u_1}{u_0}\right)}. \qquad (36)$$

Die Randbedingungen lauten gemäß (15), (16)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial\xi} \to \begin{cases}0\\0\end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases}y \to -1/\xi\\ y \to \infty\end{cases}. \qquad (37)$$

Die Erfüllung der ersteren Bedingung erfordert beim Fortsetzungsverfahren besonderes Augenmerk; siehe 2. und besonders 3. Schritt.

Wir merken an, daß für den Fall ruhender Außenluft ($u_1 = 0$) in (35), (36) für $y \to \infty$ nicht nur die Zähler, sondern auch die Nenner Null werden. Das erklärt schon, daß dieser Fall eine besonders große Rechengenauigkeit erfordert.

Es bleibt noch zu sagen, daß infolge der in (34) bis (36) vorkommenden Ableitungen φ', φ'' sowie χ', χ'', die im Fortsetzungsverfahren explizit mit den Ausgangsfunktionen φ_0, χ_0 und Φ_0, X_0 (erster Schritt) verbunden sind, jeder weitere Schritt (vgl. zweiter und dritter Schritt) die Bildung immer höherer Ableitungen dieser Funktionen erfordert, so daß der zu erbringende Rechenaufwand sich mit jedem weiteren Schritt ganz erheblich steigert.

c) Zweiter Fortsetzungsschritt. Die für den zweiten Schritt benötigten Funktionen $(\partial\varphi/\partial\xi)_a$ bzw. $(\partial\chi/\partial\xi)_a$, bezeichnet mit Φ_1 bzw. X_1, berechnen wir, ausgehend von den im ersten Schritt konstruierten Funktionen φ_1, χ_1, nach den Gleichungen (34) bis (36).

Gleichung (34) liefert

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}\frac{u_0-u_1}{u_0}\frac{\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_1 + \frac{u_1}{u_0}\right)}{1+a y}\int_{-1/a}^{y}\frac{(1+a y)\left\{\varphi_1'' + \varphi_1'\left[-(E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)\chi_1'}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi_1} + \frac{a}{1+a y}\right]\right\}}{\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_1 + \frac{u_1}{u_0}\right)^2}dy\,. \qquad (38)$$

Mit der Geweinnung von ψ_1 haben wir zunächst den ersten Schritt abgeschlossen.

Die Gleichungen (35) und (36) ergeben dann

$$\Phi_1 = \frac{\varphi_1'' + \varphi_1'\left\{2\left[\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_1 + \frac{u_1}{u_0}\right)y - \psi_1\right] - (E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)\chi_1'}{1+(\vartheta_0/T_1)\chi_1} + \frac{a}{1+a y}\right\}}{2a\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_1 + \frac{u_1}{u_0}\right)} \qquad (39)$$

und

$$X_1 = \frac{\chi_1'' + \chi_1' \left\{ \frac{2}{E} \left[\qquad \right] - 2 \frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_1'}{1 + (\vartheta_0/T_1)\,\chi_1} + \frac{a}{1 + a\,y} \right\}}{\left(\frac{2}{E}\right) a \left(\frac{u_0 - u_1}{u_0} \varphi_1 + \frac{u_1}{u_0} \right)} . \tag{40}$$

Hierbei ist nach (32)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_0' + a\,\Phi_0' , & \varphi_1'' &= \varphi_0'' + a\,\Phi_0'' , \\ \chi_1' &= \chi_0' + a\,X_0' , & \chi_1'' &= \chi_0'' + a\,X_0'' . \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Hinsichtlich der Randbedingungen (37) ist anzumerken, daß die erstere Bedingung infolge des asymptotischen Charakters der Funktionen φ_0, Φ_0 und χ_0, X_0 nicht exakt erfüllt ist; doch ist hier bei einem Zahlenwert von $-1/a = -5$ der Fehler noch sehr klein.

Die Funktionen φ_0, φ_0' sowie χ_0, χ_0' sind aus Arbeit II bekannt. φ_0'' bzw. χ_0'' gewinnen wir dann aus (18) bzw. (19). Die Funktionen Φ_0, Φ_0' sowie X_0, X_0' sind aus der im 1. Schritt erfolgten Berechnung nach (29) und (30) bekannt. Φ_0'' bzw. X_0'' berechnen wir dann aus (23) bzw. (25).

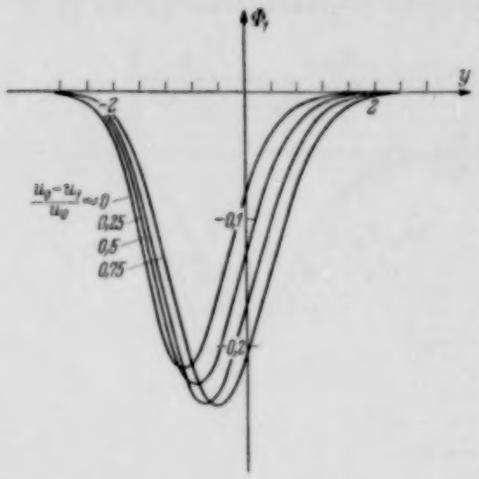

Abb. 6.

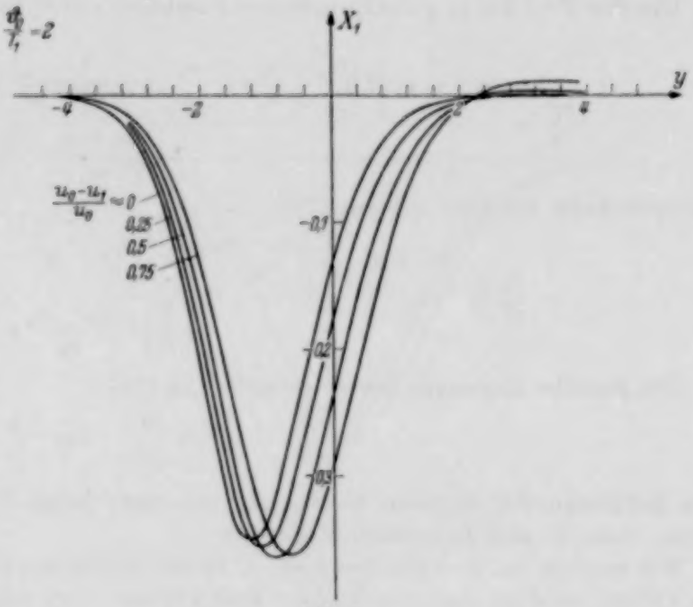

Abb. 7.

Die für die schon genannten Parameter $(u_0 - u_1)/u_0$, ϑ_0/T_1 berechneten Funktionen Φ_1, X_1 können wir wieder nur im Auszug bringen. Abb. 6, 7 für $\vartheta_1/T_1 = 2$ bzw. Abb. 8, 9 für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5$ zeigen denselben Gang mit $(u_0 - u_1)/u_0$ bzw. ϑ_0/T_1 wie die entsprechenden Abb. 2, 3 bzw. Abb. 4, 5 des ersten Schrittes.

Die Werte des zweiten Schrittes haben wir in Anbetracht der zu erwartenden Verkürzungen der Kernlänge mit wachsenden Temperaturparameter ϑ_0/T_1 zu

$$\begin{aligned} b = 0{,}15 \quad &\text{für} \quad \vartheta_0/T_1 = 0 , \\ 0{,}125 \quad &\qquad\quad\;\; 1 , \\ 0{,}10 \quad &\qquad\quad\;\; 2 \end{aligned}$$

bemessen.

Damit befinden wir uns zwar, wie man aus der Auftragung des sich aus φ_0, χ_0 (Arbeit II), φ_1, χ_1 nach (32) und φ_2, χ_2 nach (42) ergebenden Isotachen- und Isothermenfeldes ersieht, zwar noch innerhalb des Kernbereiches des Geschwindigkeitsfeldes, wenn auch schon in der Nähe des Kernendes; gelangen aber mit diesem Schritt bereits über den Kernbereich des Temperaturfeldes hinaus (vgl. Abschn. IV, Tabelle 2 u. 3), so daß für das Temperaturfeld bereits mit dem zweiten Schritt die Aufgabe beendet ist.

Wir erhalten in Fortsetzung nunmehr die Profile

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + b\,\Phi_1 = \varphi_0 + a\,\Phi_0 + b\,\Phi_1 , \\ \chi_2 &= \chi_1 + b\,X_1 = \chi_0 + a\,X_0 + b\,X_1 . \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

a) Dritter Fortsetzungsschritt. Der dritte Schritt verläuft ganz analog dem zweiten Schritt.

Obwohl wir mit dem zweiten Schritt bereits über das Kernende des Temperaturfeldes hinaus gelangt sind, uns also schon in dem Bereich befinden, der durch ständigen Abfall der Temperatur längs der Strahlachse gekennzeichnet ist, können wir die Konstruktion des Temperaturfeldes noch weiter fortsetzen, solange wir uns nur im Kernbereich des Geschwindigkeitsfeldes befinden; denn erst nach Erreichen des Kernendes des Geschwindigkeitsfeldes tritt eine Änderung in unserem Rechenschema dadurch ein, daß infolge des nun einsetzenden Abfalls der Geschwindigkeit längs der Strahlachse die scheinbare kinematische Zähigkeit nunmehr beschrieben wird durch

$$\varepsilon(x) = \varkappa_1 b_1(x) \left(u_A(x) - u_1\right), \tag{43}$$

wo $u_A(x)$ Geschwindigkeit auf der Strahlachse.

Für den dritten Schritt müssen wir die Funktion $(\partial\varphi/\partial\xi)_{a+b}$ bezeichnet mit Φ_2, und, wenn wir das Temperaturfeld noch weiter fortsetzen wollen, die Funktion $(\partial\chi/\partial\xi)_{a+b}$, bezeichnet mit X_2, berechnen.

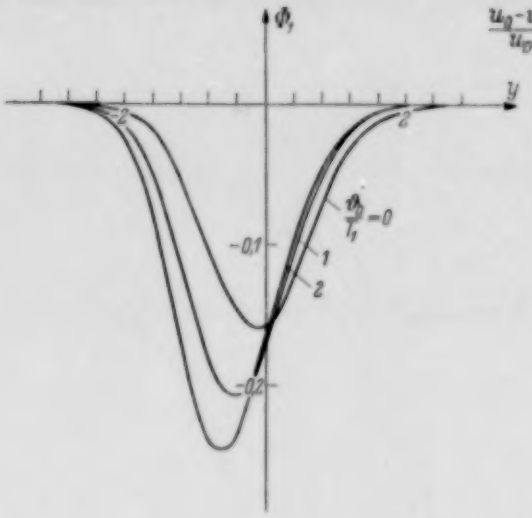

Abb. 8.

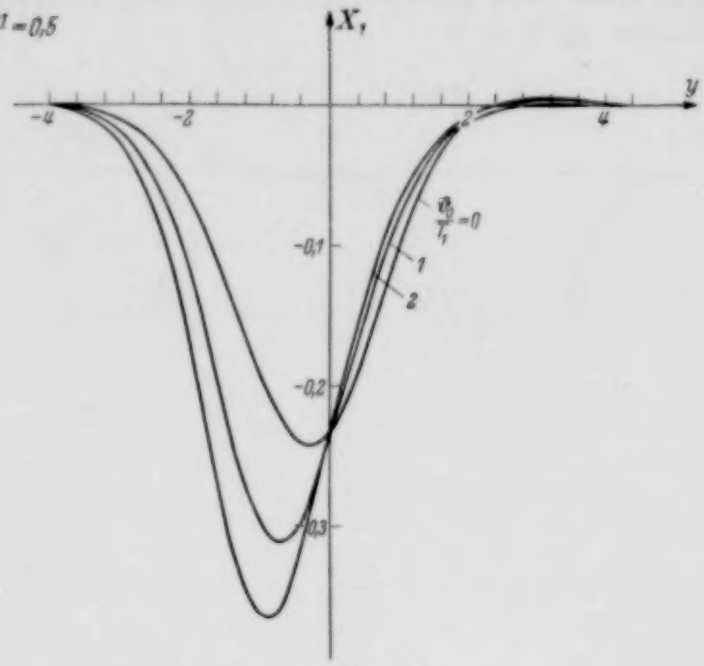

Abb. 9.

Die sich aus (34) bis (36) ergebenden Gleichungen lauten jetzt

$$\psi_2 = -\frac{1}{2}\frac{u_0-u_1}{u_0}\frac{\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_2+\frac{u_1}{u_0}\right)}{1+(a+b)\,y}\int_{-1/(a+b)}^{0}\frac{[1+(a+b)y]\left\{\varphi_2''+\varphi_2'\left[-(E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_2'}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_2}+\frac{a+b}{1+(a+b)y}\right]\right\}}{\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_2+\frac{u_1}{u_0}\right)^2}\,dy\,, \tag{44}$$

womit wir zunächst den zweiten Schritt abgeschlossen hätten.

$$\Phi_2 = \frac{\varphi_2''+\varphi_2'\left\{2\left[\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_2+\frac{u_1}{u_0}\right)y-\psi_2\right]-(E+1)\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_2'}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_2}+\frac{a+b}{1+(a+b)\,y}\right\}}{2\,(a+b)\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_2+\frac{u_1}{u_0}\right)}, \tag{45}$$

$$X_2 = \frac{\chi_2''+\chi_2'\left\{\frac{2}{E}\left[\quad\right]-2\frac{(\vartheta_0/T_1)\,\chi_2'}{1+(\vartheta_0/T_1)\,\chi_2}+\frac{a+b}{1+(a+b)\,y}\right\}}{\frac{2}{E}\,(a+b)\left(\frac{u_0-u_1}{u_0}\varphi_2+\frac{u_1}{u_0}\right)}. \tag{46}$$

Hierbei ist nach (42)

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2' &= \varphi_1' + b\,\Phi_1' = \varphi_0' + a\,\Phi_0' + b\,\Phi_1'\,, \qquad \varphi_2'' = \varphi_1'' + b\,\Phi_1'' = \varphi_0'' + a\,\Phi_0'' + b\,\Phi_1''\,,\\ \chi_2' &= \chi_1' + b\,X_1' = \chi_0' + a\,X_0' + b\,X_1'\,, \qquad \chi_2'' = \chi_1'' + b\,X_1'' = \chi_0'' + a\,\Phi_0'' + b\,X_1''\,.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Gegenüber dem zweiten Schritt benötigen wir also zusätzlich die Funktion Φ_1', Φ_1'' und X_1', X_1''.

Die Funktion Φ_1', Φ_1'' bzw. X_1', X_1'' sind durch sukzessives Differentieren aus (39) bzw. (40) zu erhalten, was wiederum die Berechnung der Ableitungen φ_1''', $\varphi_1^{(\mathrm{IV})}$ bzw. χ_1''', $\chi_1^{(\mathrm{IV})}$ und damit nach (41) die Berechnung der Ableitungen φ_0''', $\varphi_0^{(\mathrm{IV})}$ und χ_0''', $\chi_0^{(\mathrm{IV})}$, die durch sukzessives Differentieren von (18), (19) erhaltbar sind, sowie die Berechnung der Ableitungen Φ_0''', $\Phi_0^{(\mathrm{IV})}$ und X_0''', $X_0^{(\mathrm{IV})}$ erfordert, die durch sukzessives Differentieren von (23) bzw. (25) gewonnen werden können.

Man sieht schon, daß der Rechenaufwand gegenüber dem zweiten Schritt ganz erheblich angewachsen ist.

Eine Bemerkung erfordert noch die erstere der Randbedingungen (37). Mit nunmehr $-1/\xi = -1/(a+b)$ ($\approx -2{,}9$ für $\vartheta_0/T_1 = 0$ z. B.) ist für Φ_2 die Abweichung von der zu erfüllenden Randbedingung schon merkbar, so daß die Anbringung einer Korrektur erforderlich wird. Für X_2 andererseits ist gemäß dem Umstand, daß die Temperatur längs der Strahlachse bereits abfällt, die Bedingung (37) zu ersetzen durch die Randbedingung

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)_{y=-1/\xi} = \frac{E}{\xi}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right)_{y=-1/\xi}. \tag{48}$$

Man erhält diese Bedingung aus (12) durch Grenzübergang, wenn man beachtet, daß auf der Strahlachse $\partial\chi/\partial y = 0$.

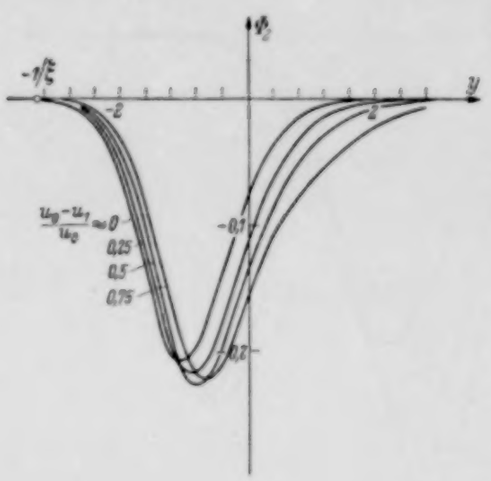

Abb. 10.

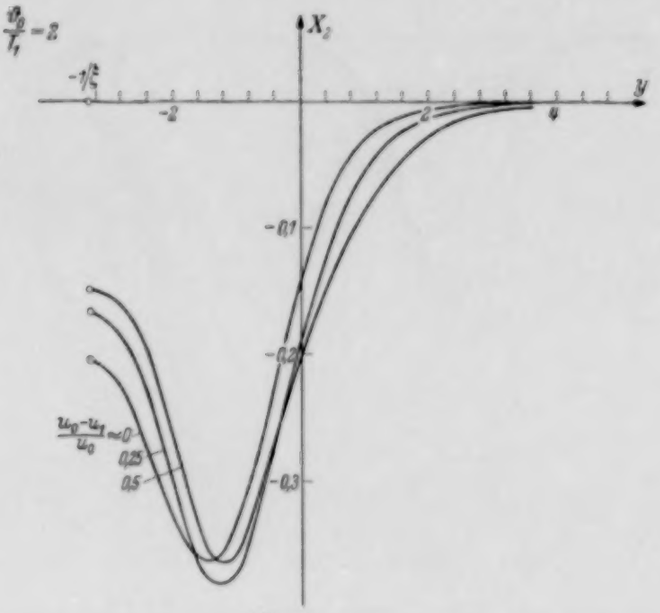

Abb. 11.

Nach dem angegebenen Schema haben wir für die schon genannten Parameterwerte die Funktionen Φ_2 und in einigen Fällen auch die Funktion X_2 berechnet. Es ist zu bemerken, daß die durch den ersten Schritt festgelegte Rechengenauigkeit (glatter Kurvenverlauf von Φ_0 bzw. X_0 in der Auftragung eines DIN A4-Blattes) nunmehr in der dritten Fortsetzung nicht mehr ganz ausreichend war. Die sich im unregelmäßigen Verlauf der Kurven — insbes. für X_2 — zu $y \to \infty$ hin zeigende Ungenauigkeit der Rechnung (vgl. z. B. Abb. 12) trat bei größerem $(u_0 - u_1)/u_0$ und kleinerem ϑ_0/T_1 stärker hervor. Abb. 10, 11 für $\vartheta_0/T_1 = 2$ und Abb. 12, 13 für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5$ zeigen wieder die berechneten Funktionen Φ_2, X_2 in Auswahl, wobei die letzteren nunmehr die Randbedingung (48) erfüllen.

Die Werte des dritten Schrittes haben wir mit $c = 0{,}1$ bemessen. Wir erhalten dann in Fortsetzung die Profile

$$\varphi_3 = \varphi_2 + c\,\Phi_2 = \varphi_0 + a\,\Phi_0 + b\,\Phi_1 + c\,\Phi_2 \tag{49}$$

und, falls wir die Konstruktion des Temperaturfeldes noch weiter fortsetzen wollen,

$$\chi_3 = \chi_2 + c\,X_2 = \chi_0 + a\,X_0 + b\,X_1 + c\,\Phi_2\,. \tag{50}$$

Mit diesem Schritt gelangen wir bereits über das Kernende des Geschwindigkeitsfeldes hinaus. Da jedoch der Abfall der Geschwindigkeit, wie auch der Temperatur, längs der Strahlachse zunächst ganz allmählich erfolgt (vgl. Abb. 17), besteht hier noch keine Notwendigkeit einer Änderung unseres Rechenschemas gemäß (43).

In Abb. 14 bzw. 15 haben wir schließlich noch für $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}25$, $\vartheta_0/T_1 \approx 0$ als Musterbeispiel die Funktionen Φ_0, Φ_1, Φ_2 bzw. X_0, X_1, X_2 nebeneinander dargestellt.

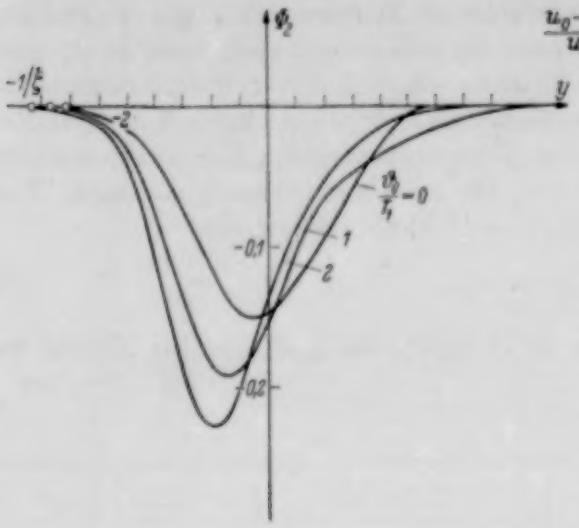

Abb. 12.

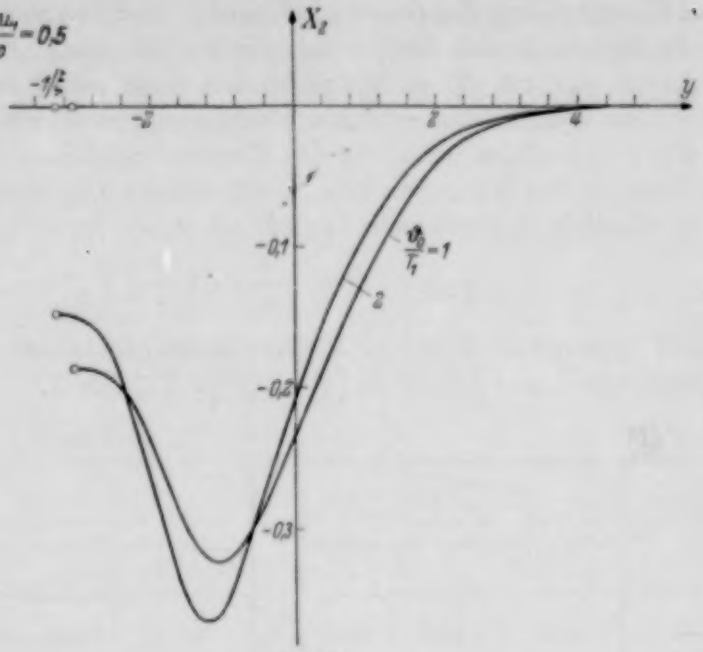

Abb. 13.

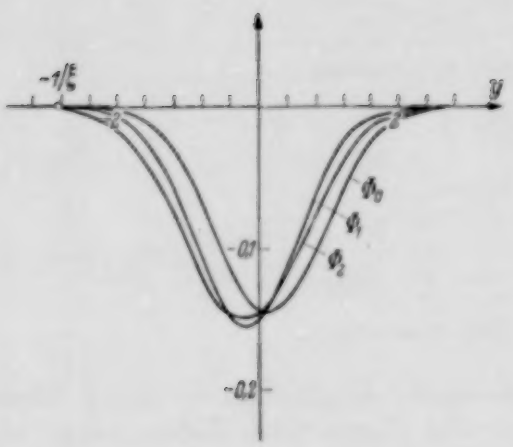

Abb. 14.

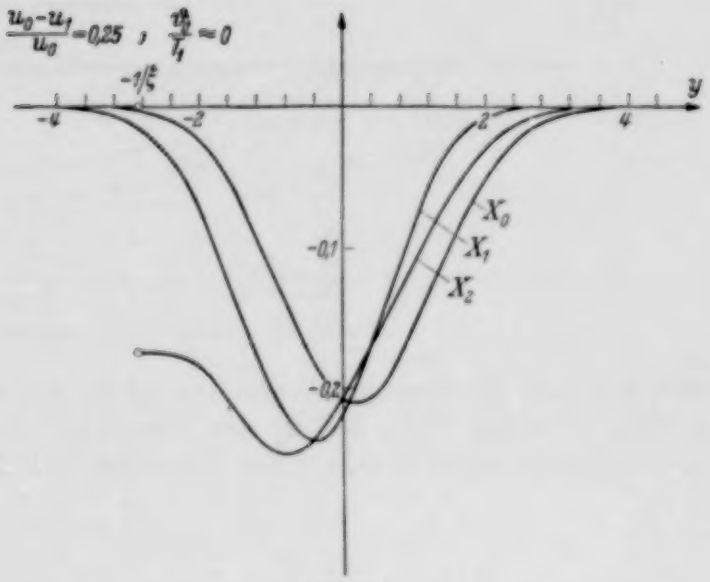

Abb. 15.

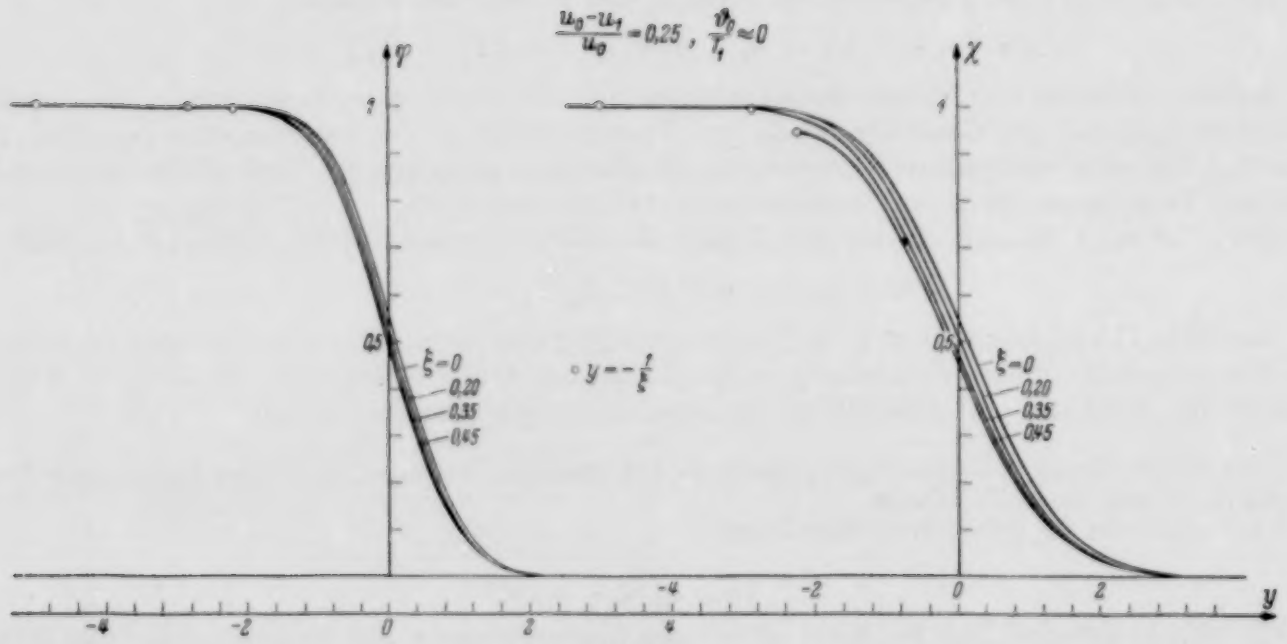

Abb. 16.

4. Beschreibung des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes im Kernbereich[1]. Die in Abschn. 3 durchgeführte Berechnung ergab die Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeit bzw. Temperatur φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 bzw. χ_0, χ_1, χ_2, χ_3 in den Schnitten $\xi = 0$, a, $a+b$, $a+b+c$ des Kernbereiches; vgl. die in Abb. 16 dargestellten Profile im Fall des Musterbeispiels $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5$, $\vartheta_0/T_1 \approx 0$.

Wir beschreiben nunmehr das Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfeld im Kernbereich mittels des Verlaufs der Isotachen bzw. Isothermen: r/r_0 über x/r_0 für $\varphi = \text{konst.}$ bzw. $\chi = \text{konst.}$ Nach der in Abschn. II gegebenen Definition $y = (r/r_0 - 1)/\xi$, $\xi = (1/\sigma)\, x/r_0$ haben wir

$$\frac{r}{r_0} = 1 + \xi\, y\,, \qquad \frac{x}{r_0} = \sigma\, \xi\,. \tag{51}$$

Gemäß unserer in Abschn. 2 getroffenen Annahme $\sigma(x) = \text{konst.}$ für das einzelne Modell entnehmen wir σ der Arbeit II $\left(\sigma = \sigma(0)\right)$: Tabelle 1.

Tabelle 1

	$\frac{u_0-u_1}{u_0} \approx 0$				$\frac{u_0-u_1}{u_0} = 0{,}25$			$\frac{u_0-u_1}{u_0} = 0{,}50$			$\frac{u_0-u_1}{u_0} = 0{,}75$		
	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2		$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2	$\vartheta_0/T_1 = 0$	1	2
$\frac{u_0-u_1}{u_0}\,\sigma$	26,28	26,28	26,75	σ	97,75	97,94	98,72	45,17	45,17	45,25	27,01	26,23	25,93

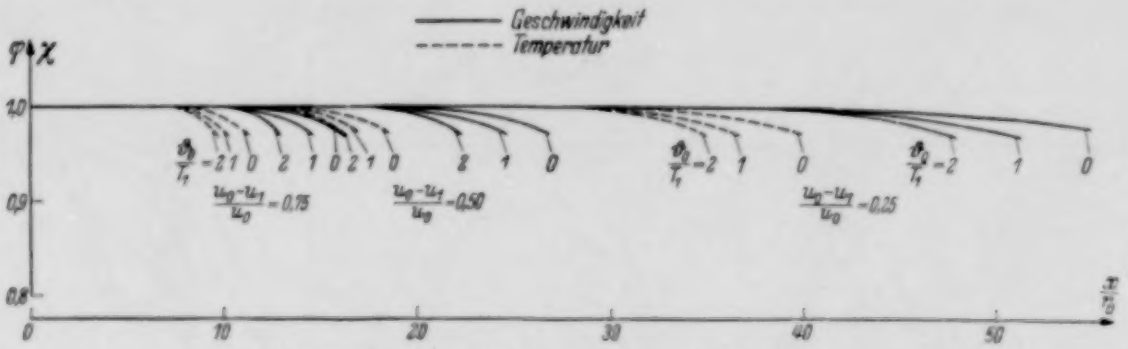

Abb. 17. Geschwindigkeit und Temperatur längs Strahlachse.

Dabei hat, wie in Abschn. 2 erörtert wurde, der empirische Koeffizient $\varkappa_1$ den Zahlenwert $\varkappa_1 = 0{,}0082$. Für den Fall, daß $\varkappa_1$ den Charakter einer Modellkonstanten haben sollte, wären auch andere Zahlenwerte denkbar; die Werte der Tabelle 1 wären dann gemäß der Relation

$$\frac{\sigma^*}{\sigma} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^*}$$

zu modifizieren.[2]

Das Ergebnis unserer Rechnung enthalten die Tabellen 2 und 3. Die effektiv vorhandenen Geschwindigkeiten bzw. Temperaturen ergeben sich gemäß den Formeln

$$u = (u_0 - u_1)\,\varphi + u_1 \quad \text{bzw.} \quad T = (T_0 - T_1)\,\chi + T_1\,.$$

Auf eine zahlenmäßige Angabe der Kernlängen haben wir verzichtet, da bei dem ganz allmählich einsetzenden Abfall der Geschwindigkeit und Temperatur längs der Strahlenachse (vgl. Abb. 17), derartige Angaben wenig sinnvoll erscheinen. Wir haben statt dessen den Verlauf der Geschwindigkeit und Temperatur längs der Strahlachse in Abb. 17 dargestellt.

Abb. 18[3] zeigt die sich ergebenden Isotachen- und Isothermenfelder im Beispiel der Fälle

$$(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5\,; \quad \vartheta_0/T_1 = 0,\ 1,\ 2\,.$$

Aus Abb. 17 und 18 ergibt sich als Temperatureffekt eine longitudinale und laterale Verkürzung des Mischungsfeldes; diese Verkürzung entspricht der aus Arbeit II folgenden Drehung des Winkelraumes der Mischung, mit Scheitel in der Düsenkante, zur Strahlachse hin.

---

[1] Die Durchführung der schwierigen numerischen Rechnungen verdanke ich meinen Mitarbeitern Herrn *Herbert Moch* und Frau *Lilli Schulze*.

[2] Das ergibt die aus (10) folgende Gleichung:

$$\sigma = \frac{1}{2\,\varkappa_1(\sigma\, c_1)\,(u_0 - u_1)/u_0}\,.$$

[3] In Abb. 18 haben wir, um den Kontrast zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld besser hervorzuheben, nur den Kernbereich des Temperaturfeldes wiedergegeben.

Doch ist der Temperatureffekt hier nicht sehr erheblich. Von größerer Bedeutung erscheint dagegen die wesentlich andere Struktur des Temperaturfeldes gegenüber dem Geschwindigkeitsfeld, die durch den sich aus dem Experiment ergebenden Wert $E=2$ [vgl. (22)] für das Übertragungsverhältnis bedingt ist und sich in einer größeren Breite sowie geringeren Tiefe des Temperaturfeldes prägnant dartut.

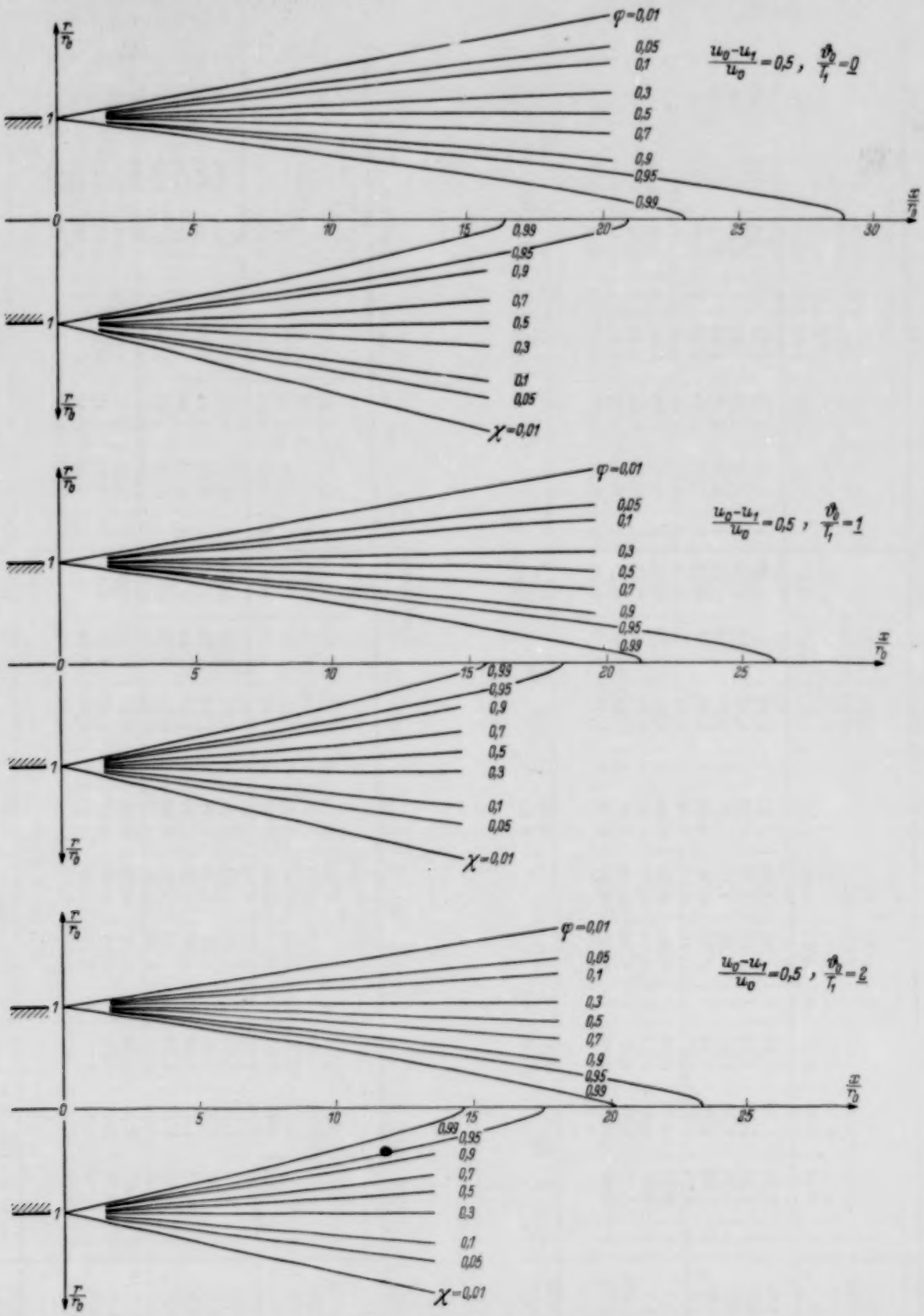

Abb. 18. Feld der Isotachen und Isothermen.

Tabelle 2. ***Isotachen***

$\xi = (1/\sigma)\, x/r_0$	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} \approx 0$												$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}25$											
	$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$				$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$			
	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4
$\varphi = 0{,}01$	1	1,32	1,55	1,69	1	1,26	1,42	1,55	1	1,24	1,35	1,46	1	1,38	1,65	1,82	1	1,37	1,54	1,69	1	1,30	1,44	1,58
0,05	1	1,22	1,38	1,48	1	1,16	1,25	1,32	1	1,12	1,18	1,24	1	1,26	1,45	1,57	1	1,21	1,34	1,43	1	1,17	1,25	1,33
0,1	1	1,17	1,29	1,37	1	1,10	1,17	1,20	1	1,07	1,09	1,12	1	1,21	1,35	1,44	1	1,15	1,23	1,29	1	1,11	1,16	1,20
0,3	1	1,06	1,10	1,12	1	0,99	0,98	0,96	1	0,95	0,92	0,88	1	1,09	1,14	1,17	1	1,02	1,02	1,02	1	0,98	0,96	0,93
0,5 $\frac{r}{r_0}$	1	0,99	0,97	0,95	1	0,92	0,85	0,80	1	0,88	0,80	0,73	1	1,01	1,00	0,99	1	0,94	0,89	0,85	1	0,90	0,84	0,78
0,7	1	0,92	0,84	0,78	1	0,85	0,73	0,64	1	0,81	0,70	0,58	1	0,93	0,86	0,80	1	0,86	0,76	0,67	1	0,83	0,73	0,62
0,9	1	0,81	0,65	0,53	1	0,74	0,57	0,42	1	0,71	0,55	0,38	1	0,82	0,66	0,54	1	0,76	0,79	0,44	1	0,74	0,57	0,41
0,95	1	0,76	0,55	0,41	1	0,70	0,49	0,31	1	0,66	0,48	0,28	1	0,76	0,56	0,42	1	0,71	0,51	0,33	1	0,68	0,50	0,31
0,99	1	0,66	0,38	0,16	1	0,61	0,35	0,10	1	0,58	0,36	0,10	1	0,67	0,39	0,17	1	0,61	0,36	0,12	1	0,59	0,36	0,13
0,95	$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}65$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}56$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}50$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}65$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}56$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}51$			
0,99																								
			0,50				0,45				0,43				0,51				0,46				0,43	

Isothermen

$\xi = (1/\sigma)\, x/r_0$	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} \approx 0$												$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}25$											
	$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$				$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$			
	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4
$\chi = 0{,}01$	1	1,44	1,78	1,99	1	1,39	1,63	1,82	1	1,27	1,40	1,52	1	1,52	1,91	1,79	1	1,47	1,75	1,98	1	1,43	1,64	1,85
0,05	1	1,31	1,53	1,66	1	1,24	1,38	1,48	1	1,20	1,29	1,37	1	1,36	1,62	1,77	1	1,30	1,47	1,61	1	1,25	1,37	1,48
0,1	1	1,23	1,40	1,49	1	1,16	1,25	1,30	1	1,11	1,16	1,19	1	1,28	1,48	1,58	1	1,21	1,32	1,41	1	1,16	1,23	1,28
0,3	1	1,08	1,13	1,13	1	1,00	0,97	0,94	1	0,95	0,90	0,85	1	1,11	1,17	1,20	1	1,03	1,03	1,01	1	0,98	0,95	0,90
0,5 $\frac{r}{r_0}$	1	0,98	0,94	0,89	1	0,89	0,80	0,71	1	0,85	0,75	0,63	1	1,00	0,97	0,94	1	0,92	0,84	0,76	1	0,87	0,78	0,67
0,7	1	0,87	0,75	0,64	1	0,79	0,63	0,48	1	0,75	0,60	0,42	1	0,89	0,77	0,67	1	0,81	0,66	0,52	1	0,77	0,63	0,46
0,9	1	0,73	0,47	0,26	1	0,66	0,40	0,14	1	0,62	0,40	0,13	1	0,73	0,49	0,26	1	0,67	0,42	0,21	1	0,64	0,42	0,16
0,95	1	0,65	0,33	0	1	0,59	0,29	—	1	0,56	0,30	—	1	0,66	0,35	0	1	0,60	0,31	—	1	0,57	0,32	—
0,99	1	0,51	0,07	—	1	0,47	0,07	—	1	0,44	0,11	—	1	0,52	0,10	—	1	0,47	0,10	—	1	0,44	0,12	—
0,95	$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}45$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}40$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}37$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}45$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}40$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = 0{,}38$			
0,99																								
			0,36				0,34				0,32				0,36				0,34				0,32	

Tabelle 3. *Isotachen*

$\xi = (1/\sigma)\, x/r_0$	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}50$												$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}75$											
	$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$				$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$			
	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4
$\varphi = 0{,}01$	1	1,44	1,78	2,00	1	1,42	1,67	1,83	1	1,38	1,56	1,74	1	1,56	1,97	2,28	1	1,53	1,86	2,11	1	1,52	1,78	2,04
0,05	1	1,32	1,55	1,68	1	1,26	1,42	1,53	1	1,23	1,34	1,44	1	1,39	1,68	1,85	1	1,35	1,57	1,72	1	1,33	1,49	1,63
0,1	1	1,25	1,43	1,53	1	1,19	1,30	1,38	1	1,15	1,23	1,29	1	1,31	1,53	1,66	1	1,26	1,42	1,53	1	1,23	1,35	1,44
0,3	1	1,11	1,19	1,23	1	1,05	1,07	1,07	1	1,02	1,01	1,00	1	1,15	1,25	1,30	1	1,10	1,14	1,17	1	1,06	1,08	1,09
0,5 $\frac{r}{r_0}$	1	1,03	1,04	1,03	1	0,97	0,93	0,89	1	0,93	0,88	0,82	1	1,05	1,08	1,08	1	1,00	0,98	0,95	1	0,97	0,93	0,90
0,7	1	0,95	0,89	0,84	1	0,88	0,79	0,71	1	0,85	0,76	0,66	1	0,96	0,92	0,87	1	0,91	0,83	0,76	1	0,88	0,80	0,71
0,9	1	0,83	0,68	0,57	1	0,77	0,61	0,47	1	0,74	0,60	0,44	1	0,84	0,70	0,59	1	0,79	0,64	0,51	1	0,77	0,63	0,49
0,95	1	0,77	0,59	0,44	1	0,72	0,53	0,36	1	0,70	0,53	0,34	1	0,78	0,60	0,46	1	0,74	0,56	0,39	1	0,72	0,56	0,38
0,99	1	0,67	0,40	0,20	1	0,64	0,37	0,15	1	0,61	0,39	0,16	1	0,68	0,41	0,21	1	0,64	0,39	0,17	1	0,63	0,42	0,19
0,95	$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}64}{0{,}51}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}58}{0{,}47}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}52}{0{,}44}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}66}{0{,}52}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}60}{0{,}48}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}55}{0{,}45}$			
0,99																								

Isothermen

$\xi = (1/\sigma)\, x/r_0$	$\frac{u_0 - u_0}{u_0} = 0{,}50$												$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}75$											
	$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$				$\vartheta_0/T_1 = 0$				$\vartheta_0/T_1 = 1$				$\vartheta_0/T_1 = 2$			
	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4	0	0,2	0,35	0,45	0	0,2	0,325	0,425	0	0,2	0,3	0,4
$\chi = 0{,}01$	1	1,62	2,08	2,38	1	1,56	1,91	2,15	1	1,54	1,80	2,07	1	1,80	2,40	2,78	1	1,76	2,23	2,60	1	1,76	2,13	2,51
0,05	1	1,43	1,75	1,97	1	1,37	1,59	1,74	1	1,33	1,49	1,63	1	1,55	1,96	2,24	1	1,50	1,82	2,06	1	1,47	1,70	1,93
0,1	1	1,34	1,58	1,73	1	1,27	1,41	1,50	1	1,22	1,32	1,40	1	1,43	1,75	1,96	1	1,37	1,59	1,76	1	1,33	1,48	1,63
0,3	1	1,15	1,23	1,27	1	1,06	1,08	1,07	1	1,02	1,01	0,98	1	1,20	1,32	1,39	1	1,12	1,17	1,19	1	1,08	1,09	1,09
0,5 $\frac{r}{r_0}$	1	1,03	1,01	0,98	1	0,94	0,88	0,80	1	0,90	0,82	0,73	1	1,06	1,06	1,05	1	0,98	0,94	0,88	1	0,94	0,88	0,79
0,7	1	0,91	0,80	0,71	1	0,83	0,69	0,55	1	0,79	0,66	0,51	1	0,93	0,84	0,75	1	0,86	0,74	0,62	1	0,82	0,71	0,57
0,9	1	0,75	0,51	0,31	1	0,68	0,44	0,21	1	0,65	0,45	0,20	1	0,76	0,53	0,34	1	0,71	0,48	0,26	1	0,71	0,48	0,25
0,95	1	0,67	0,37	—	1	0,61	0,33	—	1	0,59	0,34	—	1	0,68	0,39	0,13	1	0,63	0,36	—	1	0,61	0,38	0
0,99	1	0,53	0,11	—	1	0,48	0,11	—	1	0,47	0,14	—	1	0,54	0,12	—	1	0,50	0,13	—	1	0,48	0,18	—
0,95	$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}46}{0{,}36}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}41}{0{,}34}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}39}{0{,}32}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}47}{0{,}36}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}42}{0{,}34}$				$\frac{r}{r_0} = 0$ für $\xi = \frac{0{,}40}{0{,}34}$			
0,99																								

In Tabelle 4 haben wir die Zahlenwerte der Querkomponente der Strömung $\psi = \sigma \frac{v}{u_0}$ angegeben, aus der $v = u_0 \psi / \sigma$ folgt. Abb. 19 zeigt die erhaltene Querkomponentenverteilung im Beispiel der Fälle $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5$; $\vartheta_0/T_1 = 0, 1, 2$. Das im Falle bewegter Außenluft bei größeren Temperaturdifferenzen in Erscheinung tretende Phänomen des Abstroms vom Mischungsfeld haben wir bereits in Arbeit II diskutiert.

Tabelle 4. *Querkomponente der Geschwindigkeit*

$y \cdot$	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} \approx 0$						$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}25$					
	$\vartheta_0/T_1 = 0$		$\vartheta_0/T_1 = 1$		$\vartheta_0/T_1 = 2$		$\vartheta_0/T_1 = 0$		$\vartheta_0/T_1 = 1$		$\vartheta_0/T_1 = 2$	
	$\xi = 0{,}2$ ψ_1^*	$\xi = 0{,}35$ ψ_2^*	$\xi = 0{,}2$ ψ_1^*	$\xi = 0{,}325$ ψ_2^*	$\xi = 0{,}2$ ψ_1^*	$\xi = 0{,}3$ ψ_2^*	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}35$ $10\,\psi_2$	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}325$ $10\,\psi_2$	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}3$ $10\,\psi_2$
—2,4	0,01	0,01	0,03	0,04	0,05	0,07	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
—2,0	0,06	0,08	0,17	0,21	0,31	0,38	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07
—1,6	0,25	0,30	0,67	0,78	1,17	1,31	0,05	0,07	0,14	0,16	0,23	0,26
—1,2	0,76	0,85	1,77	1,91	2,80	2,94	0,17	0,19	0,37	0,42	0,57	0,61
—0,8	1,61	1,71	3,24	3,28	4,62	4,56	0,36	0,38	0,70	0,73	0,98	0,98
—0,4	2,50	2,52	4,33	4,16	5,66	5,35	0,56	0,57	0,96	0,96	1,24	1,19
0	2,81	2,74	4,50	4,16	5,67	5,18	0,63	0,63	1,02	0,97	1,27	1,18
0,4	2,30	2,20	3,97	3,53	5,11	4,51	0,51	0,50	0,89	0,82	1,14	1,02
0,8	1,37	1,29	3,27	2,80	4,47	3,81	0,27	0,27	0,70	0,62	0,96	0,84
1,2	0,59	0,56	2,74	2,25	3,98	3,29	+0,04	+0,06	0,53	0,46	0,82	0,70
1,6	0,18	0,17	2,42	1,91	3,65	2,94	—0,10	—0,07	0,42	0,35	0,72	0,60
2,0	0,04	0,04	2,23	1,71	3,41	2,69	—0,17	—0,13	0,36	0,29	0,66	0,53
2,4	0,01	0,01	2,10	1,58	3,22	2,49	—0,18	—0,14	0,33	0,26	0,62	0,49
2,8			1,99	1,47	3,05	2,33	—0,18	—0,14	0,31	0,24	0,58	0,45
3,2			1,89	1,37	2,90	2,19	—0,17	—0,13	0,29	0,22	0,55	0,42
3,6			1,81	1,29	2,77	2,06	—0,16	—0,12	0,28	0,21	0,52	0,40
4,0			1,72	1,22	2,64	1,95	—0,16	—0,12	0,27	0,20	0,50	0,38
4,4			1,65	1,15	2,53	1,85	—0,15	—0,11	0,26	0,19	0,48	0,36

$$\psi^* = \frac{\psi}{(u_0 - u_1)/u_0}$$

y	$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}50$						$\frac{u_0 - u_1}{u_0} = 0{,}75$					
	$\vartheta_0/T_1 = 0$		$\vartheta_0/T_1 = 1$		$\vartheta_0/T_1 = 2$		$\vartheta_0/T_1 = 0$		$\vartheta_0/T_1 = 1$		$\vartheta_0/T_1 = 2$	
	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}35$ $10\,\psi_2$	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}325$ $10\,\psi_2$	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}3$ $10\,\psi_2$	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}35$ $10\,\psi_2$	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}325$ $10\,\psi_2$	$\xi = 0{,}2$ $10\,\psi_1$	$\xi = 0{,}3$ $10\,\psi_2$
—2,4		0,00	0,01	0,01	0,01	0,02	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02
—2,0	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
—1,6	0,10	0,12	0,22	0,27	0,35	0,41	0,13	0,16	0,26	0,31	0,39	0,46
—1,2	0,29	0,33	0,62	0,70	0,91	1,00	0,39	0,44	0,73	0,83	1,04	1,16
—0,8	0,63	0,68	1,19	1,18	1,62	1,69	0,84	0,92	1,44	1,55	1,94	2,06
—0,4	0,99	1,03	1,67	1,54	2,14	2,12	1,33	1,39	2,08	2,14	2,65	2,69
0	1,13	1,14	1,80	1,63	2,23	2,14	1,53	1,55	2,29	2,27	2,83	2,77
0,4	0,92	0,91	1,57	1,38	1,99	1,85	1,24	1,24	1,98	1,91	2,51	2,40
0,8	+0,44	+0,46	1,17	0,98	1,62	1,47	+0,54	+0,59	1,36	1,30	1,95	1,82
1,2	—0,09	—0,02	0,78	0,62	1,28	1,13	—0,30	—0,15	0,70	0,69	1,35	1,25
1,6	—0,49	—0,37	0,50	0,37	1,03	0,88	—1,02	—0,77	+0,13	+0,17	0,85	0,78
2,0	—0,71	—0,57	0,33	0,23	0,87	0,72	—1,53	—1,22	—0,27	—0,19	0,48	0,43
2,4	—0,79	—0,64	0,25	0,16	0,77	0,62	—1,81	—1,49	—0,52	—0,45	0,23	0,20
2,8	—0,80	—0,64	0,21	0,13	0,71	0,56	—1,93	—1,60	—0,66	—0,61	+0,07	+0,05
3,2	—0,78	—0,62	0,19	0,11	0,67	0,52	—1,95	—1,60	—0,72	—0,65	—0,01	—0,03
3,6	—0,75	—0,59	0,17	0,10	0,63	0,49	—1,92	—1,56	—0,74	—0,66	—0,06	—0,07
4,0	—0,72	—0,56	0,16	0,10	0,60	0,46	—1,86	—1,49	—0,73	—0,64	—0,08	—0,09
4,4	—0,69	—0,53	0,16	0,09	0,58	0,44	—1,79	—1,42	—0,71	—0,62	—0,08	—0,10
4,8	—0,66	—0,50	0,15	0,09	0,55	0,42	—1,72	—1,35	—0,69	—0,60	—0,08	—0,09
5,2	—0,63	—0,47	0,15	0,08	0,53	0,40	—1,66	—1,28	—0,66	—0,57	—0,08	—0,09
5,6	—0,61	—0,45		0,08	0,51	0,38	—1,60	—1,22	—0,63	—0,54	—0,08	—0,09

Wir bemerken noch, daß die hier in drei Fortsetzungsschritten erhaltenen Verteilungen mit nur geringer Abweichung bereits mittels zweier Schritte erhalten werden können, wie Vergleichsrechnungen ergaben. Auf Grund dieser Feststellung haben wir in den Fällen, in denen die be-

rechnete Funktion X_2 einen sich durch größere Schwankungen erweisenden unbefriedigenden Verlauf zeigte, das Temperaturfeld in der gesamten Längserstreckung des Kernbereiches des Geschwindigkeitsfeldes mittels zweier Schritte berechnet (Fälle $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}5$; $\vartheta_0/T_1 = 0$ und $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}75$; $\vartheta_0/T_1 = 0,\ 1,\ 2$).

5. Vergleich mit Messungen. Zum Vergleich ziehen wir, wie in Arbeit II, die von *O. Pabst*[1] an Heißluftstrahlen in bewegter Luft durchgeführten Messungen heran. Der aus einer Düse mit 10 mm Durchmesser tretende Strahl hatte eine Geschwindigkeit von ≈ 400 m/sec und eine Temperatur von $\approx 400°$ Celsius. Dieser Heißluftstrahl trat in einen Freistrahl von 80 mm Durchmesser mit Geschwindigkeiten von ≈ 180, 100 und 26 m/sec sowie normaler Temperatur. Die dimensionslosen Daten betragen

$(u_0 - u_1)/u_0$	0,53	0,74	0,94
ϑ_0/T_1		$\approx 1{,}3$	

Wir betrachten hier nur die beiden ersteren Fälle, während der letzte Fall bei der Untersuchung der Ausbreitung in ruhender Luft (vgl. Einleitung) herangezogen werden soll.

Die in Arbeit II erhaltenen Profile φ_0, χ_0 in Strahlenkoordinaten (die Anfangsprofile $\xi = 0$ der vorliegenden Rechnung) hatten in den oben genannten Fällen befriedigende Übereinstimmung mit den Messungen sowohl hinsichtlich der Mischbreite als auch hinsichtlich des Verhältnisses von Außen- zu Innenwinkel, diese von der durch den Düsenrand in Richtung der Strahlachse gelegten Geraden gemessen, ergeben. Dabei hatten wir bezüglich der Geschwindigkeitsverteilungen dem durch Grenzschichteinflüsse an der Düsenwandung bedingten Impulsverlust durch Einführung eines effektiven Düsenradius r_0^* gemäß der Gleichung

$$\int_0^\infty \varrho\, u\,(u - u_1)\, r\, dr = \varrho_0\, u_0\,(u_0 - u_1)\,\frac{r_0^{*2}}{2}$$

Rechnung getragen.

Nach dem Gesagten ist, da sich sowohl nach den Messungen von *O. Pabst* wie nach unserer Theorie (vgl. Abb. 16) für den Kernbereich nur eine geringe Verschiebung der Profile in Strahlenkoordinaten vom Anfangsprofil ergibt, von vornherein gute Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment hinsichtlich des Verlaufs der Grenzen der Mischfelder im Kernbereich zu erwarten.

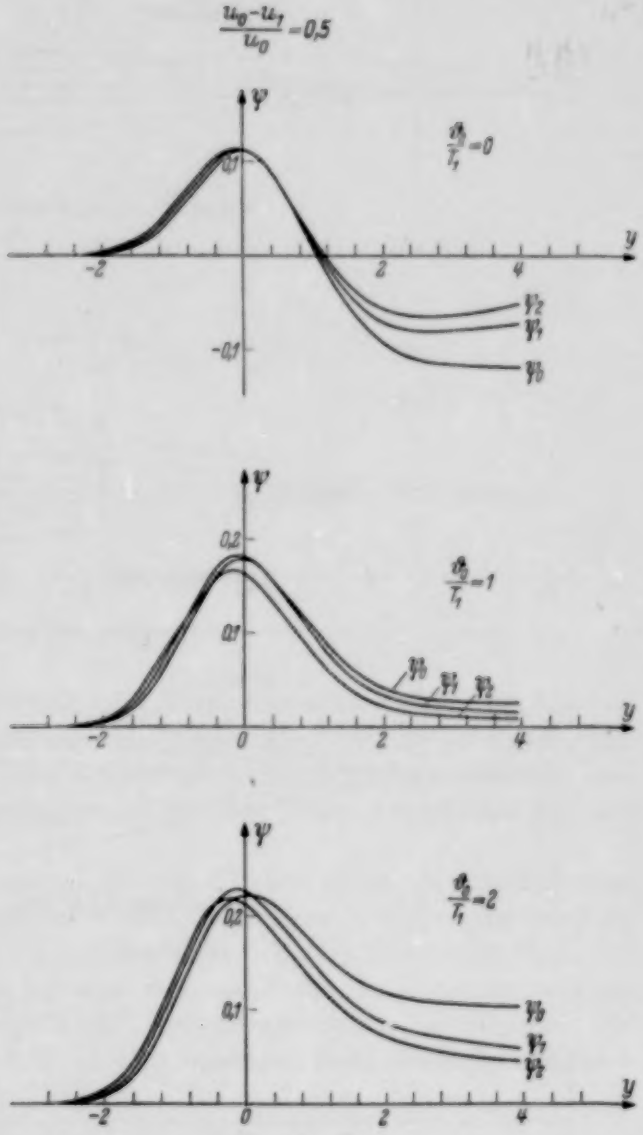

Abb. 19

In Abb. 20 haben wir für die genannten Fälle die theoretischen und experimentellen Felder der Isotachen und Isothermen für den Kernbereich aufgetragen. Die dem Bericht von *O. Pabst* entnommenen „experimentellen" Punkte wurden dort durch Schnitte der aus den einzelnen Meßpunkten konstruierten Profile erhalten und sind demgemäß mit einer gewissen Streuung behaftet. Punkte, die nach der im Bericht selbst vorgenommenen Mittelung (mittlere Kurven) und im unten angegebenen Fall stärker streuten, wurden hier fortgelassen. Eine Korrektur wurde an einer der angegebenen Isotachen vorgenommen.[2]

Die düsennahen Schnitte, die noch merkbar den Einfluß der Grenzschicht an der Düsenwandung zeigen (vgl. Arbeit II), wurden außer acht gelassen. Entsprechend der Einführung des effektiven

---

[1] *O. Pabst*, a. a. O.

[2] Es wurde im Fall $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}53$; $\vartheta_0/T_1 = 1{,}3$ der Punkt $x/2r_0 = 8$, $r/2\,r_0 = 0{,}58$ der Isotache $u/u_0 = 0{,}6$ an Hand der Meßdiagramme zu $r/2\,r_0 = 0{,}54$ korrigiert, was einen anderen Verlauf der Isotache ergibt. Die Nachprüfung wurde veranlaßt durch den unwahrscheinlichen Verlauf der angegebenen Isotache, der für das Geschwindigkeitsprofil $\varphi(\eta)$ bei $x/2\,r_0 = 8$ außen einen steileren Gradienten ergeben würde als innen.

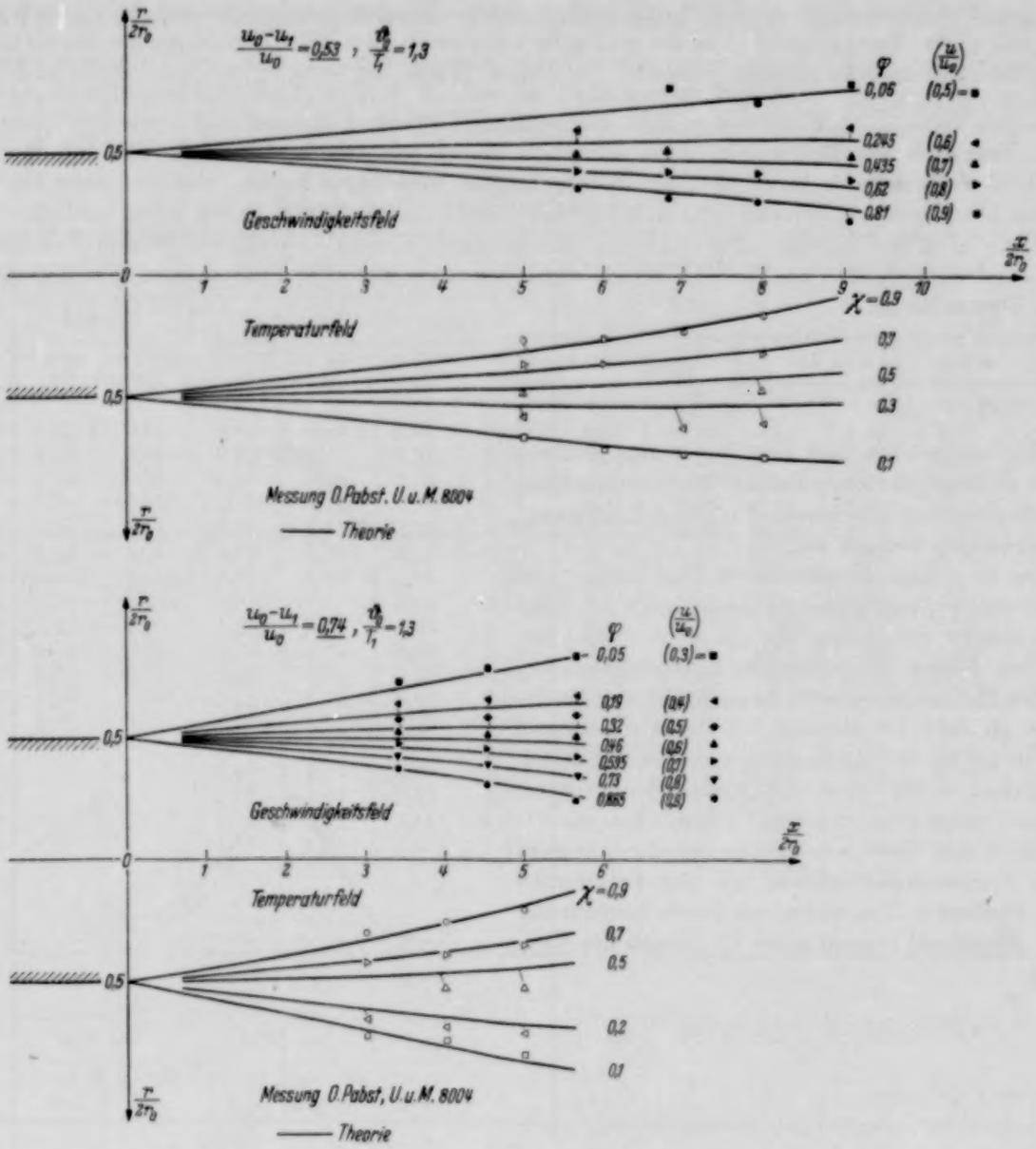

Abb. 20.

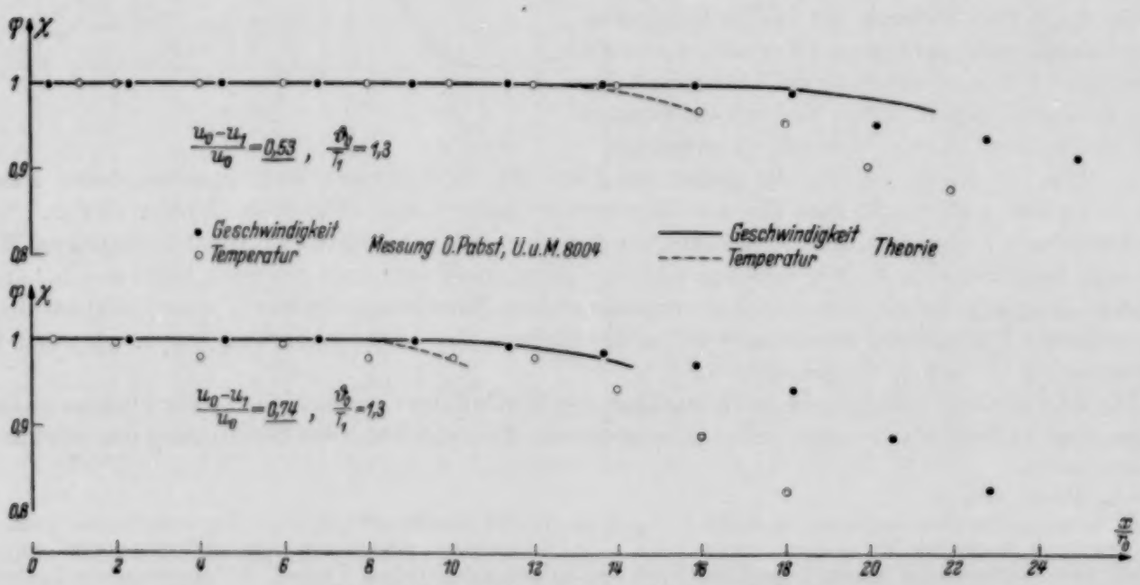

Abb. 21. Geschwindigkeit und Temperatur längs Strahlachse.

Radius r_0^* wurden die Punkte der experimentellen Isotachen in die Diagramme mit den Koordinaten $x/2\,r_0^*$ und $r/2\,r_0^*$ eingetragen.[1]

Der Vergleich zeigt die erwartete gute Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment hinsichtlich der Begrenzung der Mischfelder. Des weiteren wird die von der Theorie angezeigte wesentlich verschiedene Struktur der Geschwindigkeitsfelder und Temperaturmischfelder — größere Breite sowie geringere Tiefe des Temperaturfeldes — bestätigt.

Dagegen ist trotz der Übereinstimmung der Grenzen der Mischfelder eine z. T. stärkere Abweichung der experimentellen Isotachen und Isothermen im äußeren Teil der Mischfelder von den theoretischen Kurven festzustellen. Welche Gründe dafür maßgebend sind, lassen wir dahingestellt.

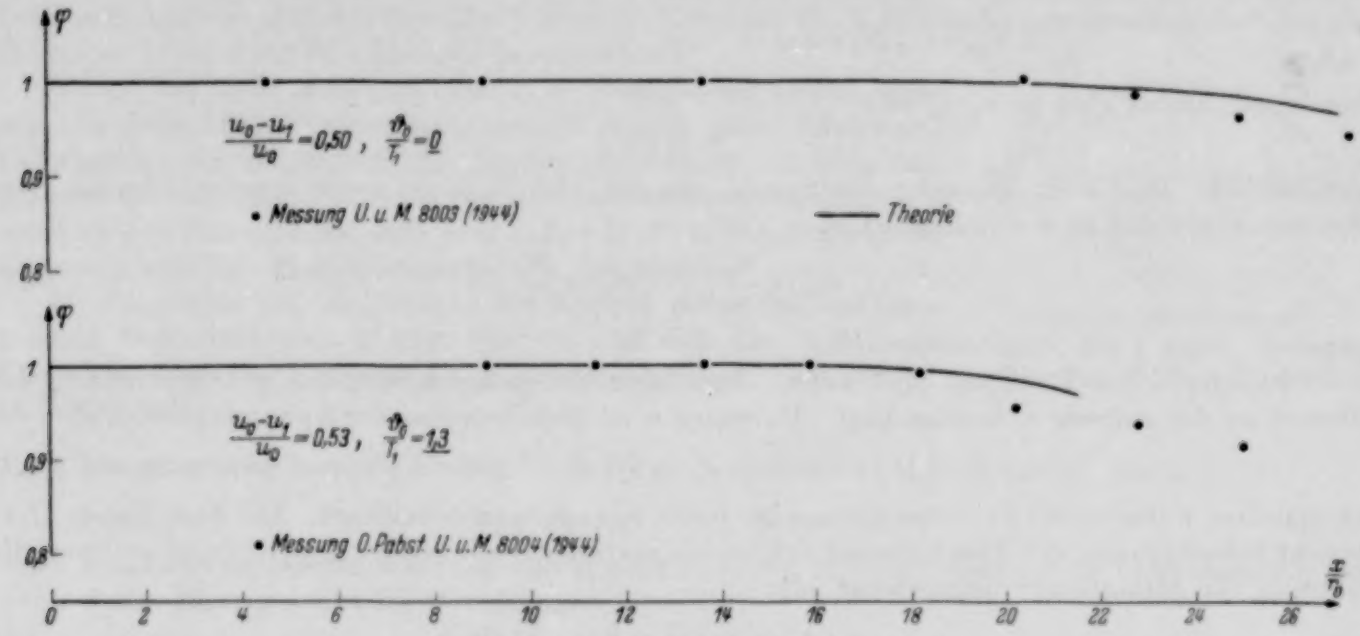

Abb. 22. Geschwindigkeit längs Strahlachse.

In Abb. 21 ist noch der Verlauf der Geschwindigkeit und Temperatur längs der Strahlachse angegeben. Dabei wurden die Meßpunkte der Geschwindigkeit wieder über x/r_0^* eingetragen. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist hier wieder als befriedigend anzusehen. Insbesondere wird die theoretische Aussage von der geringeren Tiefe des Temperaturfeldes gut bestätigt.

Wünschenswert wäre noch ein Vergleich mit Messungen, die den Effekt der Temperaturdifferenz zwischen Strahl und umgebendem Medium herausstellen. Solche Messungen scheinen für bewegte Außenluft nicht vorzuliegen. Wir haben jedoch in Abb. 22 den Geschwindigkeitsverlauf längs der Strahlachse des Falles $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}53$; $\vartheta_0/T_1 = \mathbf{1{,}3}$ mit der des Falles $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}50$, $\vartheta_0/T_1 = \mathbf{0}$, wobei die Messung einer älteren Arbeit des Verf.[2] entnommen wurde, verglichen. Die effektiven Radien betrugen in beiden Fällen $r_0^*/r_0 = 0{,}88$. Der Temperatureffekt der longitudinalen Verkürzung wird experimentell befriedigend wiedergegeben.

6. Zusammenfassung. Die Mischfelder der Geschwindigkeit und Temperatur bei der turbulenten Ausbreitung von runden Heißluftstrahlen in bewegter Luft werden in der Zone des Kernbereiches für verschiedene Werte der Geschwindigkeits- und Temperaturdifferenz berechnet. Grundlage bildet das vom Verf. in einer vorangehenden Arbeit (Ing.-Arch. 20) aufgestellte Gleichungssystem für turbulente Strömungen von Gasen stark veränderlicher Dichte. Das sich hier ergebende System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen wird mittels eines Fortsetzungsverfahrens gelöst. Ein Vergleich mit Messungen zeigt befriedigende Übereinstimmung.

(Eingegangen am 21. Dezember 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Berlin W 8, Otto-Nuschke-Str. 22/23

---

[1] Aus denselben Gründen, wie in der vorigen Fußnote angegeben, wurde im Fall $(u_0 - u_1)/u_0 = 0{,}74$ die Isotherme $\chi = 0{,}2$ statt 0,3 herangezogen.

[2] *W. Szablewski*, U. u. M. 8003 (1944).

Kuppeln gleicher Festigkeit

Von **H. Ziegler**

1. Problemstellung. Unterliegt eine Rotationsschale einer rotationssymmetrischen Belastung, gegeben durch die Radialkomponente p_r und die Meridionalkomponente p_φ der Last je Flächeneinheit, dann sind die Schnittkräfte N_φ, N_ϑ ihres Membranspannungszustandes[1] durch

$$\frac{d}{d\varphi}(r\,N_\varphi) - r_1\,N_\vartheta\cos\varphi = -\,p_\varphi\,r\,r_1\,, \qquad \frac{N_\varphi}{r_1}+\frac{N_\vartheta}{r_2}=p_r \tag{1.1}$$

bestimmt. Dabei sind φ, r_1, r_2 und

$$r = r_2\sin\varphi \tag{1.2}$$

geometrische Bestimmungsstücke der Schale, die der Abb. 1 entnommen werden können. Der Spannungszustand in der Schale ist eben und durch

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{t}\,, \qquad \sigma_\vartheta = \frac{N_\vartheta}{t} \tag{1.3}$$

gegeben, wenn t die Schalenstärke ist.

Schalen gleicher Festigkeit sind durch einen Membranspannungszustand gekennzeichnet, der überall an der zulässigen Grenze liegt. Darunter wird üblicherweise der Spannungszustand

$$\sigma_\varphi = \sigma_\vartheta = \mp\,\sigma_0 \tag{1.4}$$

verstanden, wobei σ_0 die zulässige Grenze für beide Spannungen bezeichnet. Auf dem Ansatz (1.4) beruht beispielsweise der Tropfenbehälter[2] für hydrostatischen Innendruck $p_r = \gamma z$, $p_\varphi = 0$ und die erstmals von *Milanković*[3] angegebene, mit

$$p_r = -\,\gamma\,t\cos\varphi\,, \qquad p_\varphi = \gamma\,t\sin\varphi\,, \tag{1.5}$$

d. h. nur durch ihr Eigengewicht belastete Kuppel gleicher Festigkeit.

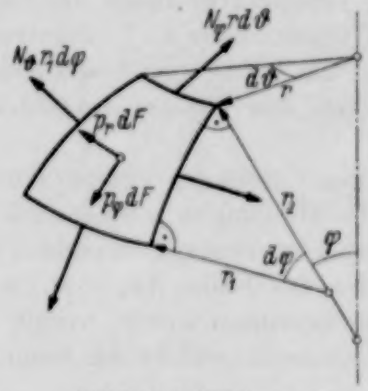

Abb. 1. Schalenelement.

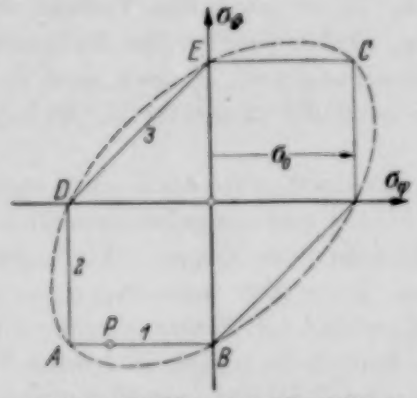

Abb. 2. Fließfigur (oder Bruchfigur).

Der Ansatz (1.4) hat den Vorzug, an keine Fließbedingung (bzw. Bruchhypothese) gebunden zu sein; er beschränkt aber andererseits die konstruktiven Möglichkeiten. Im Falle der Kuppel gleicher Festigkeit legen die Beziehungen (1.1) bis (1.5) sowohl die Mittelfläche wie den Verlauf der Wandstärke vollständig fest. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die so erhaltene Kuppelform weder vom ökonomischen noch vom ästhetischen Standpunkt zu überbieten ist; insbesondere dürfte die Kuppel von *Milanković* bei gegebener Schalenstärke t_0 im Scheitel mit einem Minimum an Material auskommen, um eine gegebene (und nicht zu große) kreisförmige Öffnung zu überspannen. Für Fälle, die (etwa aus Gründen einfacherer Herstellung) eine andere Mittelfläche verlangen, bietet der Ansatz (1.4) aber keine Ausweichmöglichkeit.

In der Spannungsebene (σ_φ, σ_ϑ) wird die Fließbedingung von *Tresca* (bzw. die Bruchhypothese konstanter Schubspannung) durch das Sechseck von Abb. 2 dargestellt, die Fließbedingung von

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl., S. 26. Berlin 1957.

[2] *W. Flügge*, a. a. O., S. 39.

[3] *M. Milanković*, Arbeiten der Jugoslaw. Akad. der Wissensch., Agram 175 (1908) S. 140. Man vergleiche auch *W. Flügge*, a. a. O., S. 36, sowie den zusammenfassenden Artikel von *K. Federhofer*, Über Schalen gleicher Festigkeit, Bauing. 20 (1939) S. 366.

v. Mises (bzw. die Bruchhypothese konstanter Gestaltänderungsarbeit) durch die umgeschriebene Ellipse. Dabei bedeutet σ_0 die Fließgrenze (bzw. Bruchgrenze) bei reinem Zug oder Druck. Die Bedingung (1.4) verlangt, daß der Spannungszustand in der ganzen Schale durch den Punkt *A* oder *C* in der Spannungsebene dargestellt werde. Das ist eine unnötige Einschränkung, denn je nachdem man der Betrachtung die Bedingung von *Tresca* oder diejenige von *v. Mises* zugrunde legt, kommt für die verschiedenen Schalenelemente als Bild in der Spannungsebene die Peripherie des ganzen Sechsecks bzw. der ganzen Ellipse in Frage.

Es ist klar, daß man bei dieser letzten Betrachtungsweise, die meines Wissens bisher nur von *Biezeno*[1] auf Kesselböden angewandt worden ist, über einen Freiheitsgrad mehr verfügt. So kann man etwa wie *Biezeno* die Wandstärke vorschreiben und die zugehörige Mittelfläche bestimmen. Oder man kann umgekehrt (innerhalb gewisser Grenzen) die Mittelfläche vorschreiben und den zugehörigen Verlauf der Wandstärke berechnen.

Wenn (1.4) nicht mehr gilt, besteht die Verformung freilich nicht mehr in einer Ähnlichkeitstransformation. Es ist daher infolge der Deformation ein sekundärer Biegespannungszustand zu erwarten, der aber bei dünnen Schalen bekanntlich vernachlässigt werden darf. Auch an den Rändern hat man ja in jedem Fall durch eine geeignete Lagerung allfällige Biegespannungen zu vermeiden.

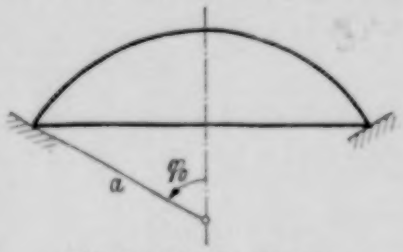

Abb. 3. Sphärische Kuppel.

Im Folgenden soll als Beispiel die Kuppel unter ihrem Eigengewicht betrachtet und gezeigt werden, daß sich eine sphärische Kuppel im Sinne der Bedingung von *Tresca* (sogar auf zwei Arten) als Kuppel gleicher Festigkeit ausbilden läßt.

2. Die sphärische Kuppel; Lösung *1*. Bei einer Kugelschale (Abb. 3) sind die Radien

$$r_1 = r_2 = a\,, \qquad r = a \sin\varphi\,. \tag{2.1}$$

Setzt man (2.1) zusammen mit (1.3) und (1.5) in (1.1) ein, so erhält man für die sphärische Kuppel unter ihrem Eigengewicht die Beziehungen

$$\frac{d}{d\varphi}(t\,\sigma_\varphi \sin\varphi) - t\,\sigma_\vartheta \cos\varphi + a\,\gamma\,t \sin^2\varphi = 0\,, \qquad \sigma_\varphi + \sigma_\vartheta + a\,\gamma\cos\varphi = 0\,. \tag{2.2}$$

Im Scheitel $\varphi = 0$ gilt $\sigma_\varphi = \sigma_\vartheta < 0$; man hat also bei völliger Ausnutzung des Materials

$$\sigma_\varphi\,(\varphi = 0) = \sigma_\vartheta\,(\varphi = 0) = -\sigma_0\,. \tag{2.3}$$

Der Bildpunkt *P* des Scheitels in der Spannungsebene ist *A*, und aus der zweiten Beziehung (2.2) sowie (2.3) ergibt sich der Radius der Mittelfläche zu

$$a = 2\,\frac{\sigma_0}{\gamma}\,. \tag{2.4}$$

Geht man einem Meridan entlang nach unten, dann kann nach den Feststellungen von Abschn. 1 der Bildpunkt *P* nicht in *A* bleiben. Er muß längs einer der Seiten *1* oder *2* des Sechsecks abwandern, und diese beiden Möglichkeiten stellen die zwei bereits erwähnten Fälle dar.

Auf der Seite *1* des Sechsecks gilt

$$\sigma_\vartheta = -\sigma_0 \tag{2.5}$$

und wegen der zweiten Beziehung (2.2) sowie (2.4)

$$\sigma_\varphi = \sigma_0\,(1 - 2\cos\varphi)\,. \tag{2.6}$$

Setzt man dies, (2.5) und (2.4) in die erste Beziehung (2.2) ein, so erhält man für t die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varphi}[t\,(1 - 2\cos\varphi)\sin\varphi] + t\,(\cos\varphi + 2\sin^2\varphi) = 0 \tag{2.7}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$t = c\,(1 + \cos\varphi)^{-2/3}\,(1 - 2\cos\varphi)^{-7/3}\,. \tag{2.8}$$

Mit der Randbedingung

$$t\,(\varphi = 0) = t_0 \tag{2.9}$$

wird hieraus

$$t = -\,2^{2/3}\,t_0\,(1 + \cos\varphi)^{-2/3}\,(1 - 2\cos\varphi)^{-7/3}\,, \tag{2.10}$$

---

[1] *C. B. Biezeno*, Der Ingenieur 39 (1922) S. 781.

und damit ist der Verlauf der Schalenstärke gegeben, sobald ihr Kleinstwert t_0 im Scheitel gewählt ist.

Auf der Seite *1* des Sechsecks (Abb. 2) gilt neben (2.5)

$$-\sigma_0 \leqq \sigma_\varphi \leqq 0\,. \tag{2.11}$$

Setzt man hier (2.6) ein, so kommt nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{1}{2} \leqq \cos\varphi \leqq 1\,. \tag{2.12}$$

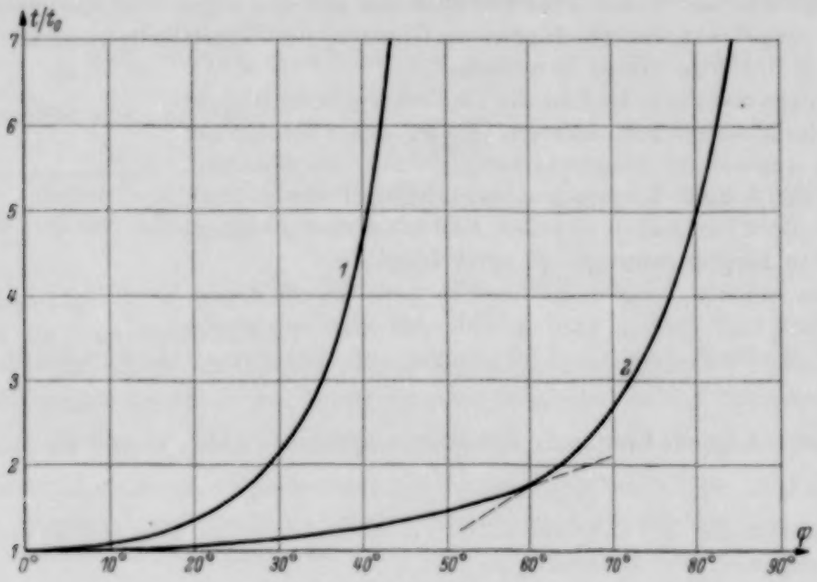

Abb. 4. Verlauf der Schalenstärke.

Der Punkt P wandert also von A bis B, während φ von 0 bis 60° wächst, und auf dieses Intervall ist somit die Lösung (2.10) beschränkt. In Wirklichkeit gilt sie sogar nicht ganz so weit, wie die Tabelle 1 bzw. die Kurve *1* in Abb. 4 zeigen, welche das Verhältnis t/t_0 als Funktion von φ darstellen. Für $\varphi \to 60°$ geht $t/t_0 \to \infty$; die Lösung *1* kommt demnach nur für verhältnismäßig flache Kugelschalen ($\varphi_0 < 60°$) in Frage.

Tabelle 1. *Verlauf der Schalenstärke für Lösung 1*

$\varphi°$	t/t_0	$\varphi°$	t/t_0
5	1,019	35	3,037
10	1,080	40	4,736
15	1,193	45	8,649
20	1,378	50	21,23
25	1,676	55	102,6
30	2,168	60	∞

3. Die sphärische Kuppel; Lösung *2*. Auf Seite *2* des Sechsecks (Abb. 2) gilt

$$\sigma_\varphi = -\sigma_0 \tag{3.1}$$

und wegen der zweiten Beziehung (2.2) sowie (2.4)

$$\sigma_\vartheta = \sigma_0\,(1 - 2\cos\varphi)\,. \tag{3.2}$$

Setzt man dies, (3.1) und (2.4) in die erste Beziehung (2.2) ein, so erhält man für t die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varphi}(t\sin\varphi) - t\,(2 - \cos\varphi) = 0 \tag{3.3}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$t = c\,(1 + \cos\varphi)^{-2}\,. \tag{3.4}$$

Mit der Randbedingung (2.9) wird hieraus

$$t = 4\,t_0\,(1 + \cos\varphi)^{-2} = t_0 \cos^{-4}\frac{\varphi}{2}\,, \tag{3.5}$$

und damit ist ein zweiter Verlauf von t auf t_0 zurückgeführt.

Auf der Seite *2* des Sechsecks (Abb. 2) gilt neben (3.1) auch

$$-\sigma_0 \leqq \sigma_\vartheta \leqq 0\,, \tag{3.6}$$

und wenn hier (3.2) eingesetzt wird, dann kommt man wieder auf (2.12). Der Punkt P wandert also von A nach D, während φ von 0 bis 60° anwächst, und auf dieses Intervall bleibt die Lösung (3.5) beschränkt. Tab. 2 und die Kurve *2* in Abb. 4 geben den Verlauf von t/t_0 als Funktion von φ.

Tabelle 2. *Verlauf der Schalenstärke für Lösung 2*

$\varphi°$	t/t_0	$\varphi°$	t/t_0
5	1,004	35	1,209
10	1,015	40	1,282
15	1,035	45	1,373
20	1,063	50	1,482
25	1,101	55	1,615
30	1,149	60	1,778

Da für $\varphi = 60°$ erst $t/t_0 = 16/9$ wird, ist die Lösung *2* durch einen viel schwächeren Anstieg der Schalenstärke charakterisiert als die Lösung *1*. Sie ist somit wesentlich ökonomischer. Zudem läßt sie sich über den Winkel 60° hinaus fortsetzen. Wenn nämlich P in D auf die Seite *3* des Sechsecks (Abb. 2) übertritt, gilt

$$\sigma_\vartheta = \sigma_0 + \sigma_\varphi \tag{3.7}$$

und wegen der zweiten Beziehung (2.2) sowie (2.4)

$$\sigma_\varphi = -\sigma_0\left(\frac{1}{2} + \cos\varphi\right). \tag{3.8}$$

Setzt man dies, (3.7) und (2.4) in die erste Beziehung (2.2) ein, so erhält man für t die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varphi}\left[t\,(1 + 2\cos\varphi)\sin\varphi\right] - t\,(2 - \cos\varphi + 2\sin^2\varphi) = 0 \tag{3.9}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$t = c\,(1 + \cos\varphi)\,(1 - \cos\varphi)^{-1/3}\,(1 + 2\cos\varphi)^{-11/3}. \tag{3.10}$$

Der Anschluß an (3.5) wird durch die Randbedingung

$$t\,(\varphi = 60°) = \frac{16}{9}\,t_0 \tag{3.11}$$

hergestellt, und diese liefert

$$t = \frac{265}{27}\sqrt[3]{2}\;t_0\,(1 + \cos\varphi)\,(1 - \cos\varphi)^{-1/3}\,(1 + 2\cos\varphi)^{-11/3}. \tag{3.12}$$

Auf der Seite *3* des Sechsecks (Abb. 2) gilt

$$-\sigma_0 \leqq \sigma_\varphi \leqq 0\,. \tag{3.13}$$

Setzt man hier (3.8) ein, so folgt

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\varphi \leqq \frac{1}{2}\,. \tag{3.14}$$

Der Punkt P wandert demnach von D nach E, während φ von 60° bis 120° wächst, und über diesen letzten Wert hinaus läßt sich die Lösung (3.12) nicht fortsetzen. In der Tat wächst t/t_0, wie die Tabelle 3 bzw. die Kurve *2* in Abb. 4 zeigt, im Gültigkeitsbereich von (3.12) sehr stark an und geht für $\varphi \to 120°$ gegen ∞.

Tabelle 3. *Verlauf der Schalenstärke bei der Fortsetzung von Lösung 2*

$\varphi°$	t/t_0	$\varphi°$	t/t_0
60	1,778	95	21,40
65	2,159	100	43,81
70	2,727	105	118,8
75	3,600	110	486,6
80	5,008	115	6195
85	7,428	120	∞
90	11,95		

Für $\varphi = 90°$ folgt aus (3.12) $t/t_0 = 11{,}95$. Bei einer Halbkugel wächst also die Schalenstärke vom Scheitel bis zum Rand rund auf das 12fache, und zwar entfällt der größte Teil des Anstiegs auf die letzten 30°.

Der Breitenkreis $\varphi = 60°$ entspricht dem Übergang des Punktes P von der Seite *2* im Sechseck (Abb. 2) auf die Seite *3*. Er stellt die Bruchfuge dar, an welcher σ_ϕ das Vorzeichen wechselt und zur Zugspannung wird. Die Funktion $t(\varphi)$ hat hier einen Sprung in der Ableitung.

4. Diskussion. Die Lösungen *1* und *2* sind an die Voraussetzung gebunden, daß das Material der Fließbedingung von *Tresca* (bzw. der Bruchhypothese konstanter Schubspannung) genüge.

Der Radius a der sphärischen Kuppel ist für beide Lösungen (*1* und *2*) derselbe. Er ist nach (2.4) durch das Material bestimmt, sofern man dieses voll ausnützen will. Für Beton mit $\gamma = 2{,}4$ g/cm³ und $\sigma_0 = 150$ kg/cm² wird z. B. $a = 1250$ m, für einen Stahl mit $\gamma = 7{,}85$ g/cm³ und $\sigma_0 = 1500$ kg/cm² sogar $a = 3820$ m.

Man kann natürlich für σ_0 nur einen Bruchteil der zulässigen Spannung ansetzen und erhält so eine Kuppel von kleinerem Radius, die noch immer überall die gleiche Festigkeit besitzt. Ferner dürfte es nicht schwierig sein, die Ergebnisse für den Fall zu verallgemeinern, daß neben dem Eigengewicht noch eine konstante Last je Flächeneinheit der Schale (Verputz, Isolation) oder ihrer Horizontalprojektion (Schneelast) vorhanden ist.

Nach (2.4) stimmt der Radius a mit dem Krümmungsradius überein, welchen die Kuppel von *Milankovič* im Scheitel aufweist. Die Mittelfläche der hier diskutierten Kuppel ist daher die oskulierende Kugel im Scheitel derjenigen von *Milankovič*. Bei dieser nimmt mit wachsendem Abstand vom Scheitel der Radius r_1 zu, während bei der Kugel $r_1 = a$ bleibt. Mit der Kuppel von *Milankovič* lassen sich also größere Flächen überspannen als mit der sphärischen. Andererseits geht t/t_0 bei der Kuppel von *Milankovič* für $\varphi \to 90°$ nach ∞, während bei der sphärischen Kuppel (Lösung *2*) der Winkel $\varphi = 90°$ leicht überschritten werden kann.

Die hier behandelten Lösungen stellen nur zwei von unendlich vielen Möglichkeiten dar, eine Kuppel mit gleicher Festigkeit auszustatten. Man beachte in diesem Zusammenhang neben der Freiheit in der Wahl der Mittelfläche die Möglichkeit anderer Fließfiguren (oder Bruchfiguren), wie etwa der *v. Mises*schen Ellipse in Abb. 2. Hinsichtlich der Form der Mittelfläche bestehen indessen gewisse Schranken. So läßt sich beispielsweise das Problem für eine Kegelschale ebensowenig lösen wie für eine oben offene (d. h. mit einer kreisförmigen Öffnung um den Scheitel versehene) sphärische Schale.

(Eingegangen am 24. Dezember 1957.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Hans Ziegler*, Rüschlikon bei Zürich, Weiherweg 6

H. Rietschels Lehrbuch der Heiz- und Lüftungstechnik

Dreizehnte neubearbeitete Auflage. Von Dr.-Ing. Wilhelm Raiß, o. Professor an der Technischen Universität Berlin, Direktor des Institutes für Heizung und Lüftung. Unter Mitarbeit von Dr. phil. habil. F. Bradtke †. Mit 524 Abbildungen, 43 Zahlen- und 2 Bildtafeln sowie den Arbeitsblättern 1—15. XII, 568 Seiten 4°. Ganzleinen DM 79,50

Inhaltsübersicht: **I. Teil: Einrichtungen zur Heizung und Lüftung.** Einzelheizung: Öfen für feste Brennstoffe. Der Schornstein. Gasheizöfen. Elektrische Raumheizung. — Zentralheizung: Allgemeines. Bauelemente der Warmwasser- und Dampfheizungen. Warmwasserheizungen. Niederdruckdampfheizungen. Heizzentralen. Sonderbauarten der Dampf- und Wasserheizung. Luftheizung. Gesichtspunkte zur Wahl des Wärmeträgers und der Heizungsart. — Zentrale Warmwasserbereitung: Warmwasserbereitung mit Gebrauchswasserspeicherung. Warmwasserbereitung mit Heißwasserspeicherung. Heizflächen- und Speicherbemessung. Verbrauch und Wirtschaftlichkeit. Steinbildung und Korrosion. — Fernheizung: Allgemeines. Fernleitungen. Dampffernheizung. Heißwasserfernheizung. Warmwasserfernheizung. Stadtheizung. Heizkraftanlagen. Wärmepumpe. — Lüftungs- und Klimatechnik: Allgemeines. Freie Lüftung. Lüftungsanlagen. Klimaanlagen. — **II. Teil: Berechnung von Heiz- und Lüftungsanlagen.** Hygienische und wärmephysiologische Grundlagen: Einleitung. Wärmeregelung des menschlichen Körpers. Durch die Haut vermittelte Einflüsse von Umgebungsluft auf den menschlichen Körper. Behaglichkeitsmaßstäbe. Durch die Atmung vermittelte Einflüsse der Umgebungsluft für den menschlichen Körper. — Meteorologisch-klimatische Grundlagen: Einleitung. Die Temperatur der Außenluft. Die Feuchtigkeit der Außenluft. Der Wind. Die Sonnenstrahlung. Physikalische Grundlagen für das Rechnen mit feuchter Luft. — Wärmeübertragung: Allgemeines. Wärmeleitung. Wärmeübergang. Wärmedurchgang. Wärmeübertragung durch Strahlung. — Wärmetechnische Berechnungen: Der Wärmebedarf. Kesselheizflächen. Raumheizkörper. Decken- und Fußbodenheizung. Wärmeaustauscher. Rohrisolierungen. — Strömungsfragen: Die Gesetze für die Strömung in Leitungen. Der Druckverlust in Leitungsnetzen. Ventilatoren und Kreiselpumpen. — Berechnung von Rohrnetzen: Allgemeines. Berechnung von Fernleitungen. Berechnung der Strangnetze von Warmwasserheizungen. Berechnung der Strangnetze von Niederdruckdampfheizungen. Die Berechnung von Hochdruck- und Unterdruckdampfheizungen. — Betrieb von Heizanlagen: Begriffe zur Wärmebilanz. Der Heizwärmebedarf und seine Veränderlichkeit. Wärmebedarf und Wärmeverbrauch. Heizbetrieb. — Berechnung von Lüftungs- und Klimaanlagen: Berechnung der Luftverteilungsleitungen. Berechnung einer Lüftungsanlage. Klimatechnische Berechnungen. — **III. Teil: Zahlen- und Bildtafeln.** Zahlentafeln: Stoffwerte und wärmetechnische Tabellen. Wärmebedarfsrechnung. Berechnung von Heizflächen und Isolierungen. Rohrnetzberechnung. Allgemeines. Bildtafeln. — Regeln, Richtlinien, Normen. — **Namenverzeichnis. — Sachverzeichnis.**

Die umfangreiche Bautätigkeit der letzten zehn Jahre hat die technische Entwicklung auf dem Fachgebiet Heizung und Lüftung nachhaltig gefördert. Neue Bauformen von Kesseln und Heizkörpern sowie die zunehmende Verwendung von Deckenheizungen haben das Gesicht der Heizanlagen teilweise geändert. Bei der Wärmeversorgung gewinnt für dichtbesiedelte Stadtgebiete die Fernheizung und für Einzelanlagen die Ölfeuerung immer mehr an Bedeutung. Ähnlich einschneidende Fortschritte sind im Bau von Lüftungs- und Klimaanlagen zu erkennen.

Damit ist eine völlige Neubearbeitung dieses Lehrbuches notwendig geworden, die sich nicht nur auf die beschreibenden Abschnitte, sondern auch auf den gesamten Berechnungsteil erstreckt. Eingehender als seither werden in der 13. Auflage die Gesetze der Wärmeübertragung behandelt. Zur Vereinfachung von Wärmeaustauschrechnungen werden die Lösungen schwieriger oder umfangreicher Formeln weitgehend in Diagrammform gebracht. Dem Abschnitt über die Bestimmung des Wärmebedarfs von Gebäuden liegt die jetzt fertiggestellte Neufassung der DIN 4701 zugrunde. Experimentelle und theoretische Untersuchungen aus den letzten Jahren ermöglichen vielfach eine genauere Ermittlung der Wärmeleistung verschiedener Heizkörperbauarten bzw. Heizsysteme. U. a. werden für die Berechnung von Deckenheizungen neue Verfahren angegeben, deren Anwendung an Beispielrechnungen erläutert wird.

Die Rietschelschen Hilfstafeln zur Bemessung der Leitungsnetze von Heizanlagen sind nach dem derzeitigen Stand unseres Wissens über die Rohrreibung neu berechnet und durch weitere, zum Teil graphische Tafeln ergänzt worden. Für die Berechnung von Fernleitungen und von Schwerkraftheizungen mit oberer Verteilung werden gegenüber den früheren Auflagen vereinfachte Verfahren angegeben. Ausführlich wird auf die Berechnung von Klimaanlagen eingegangen. Ein Sonderabschnitt ist den Fragen des Betriebes und der Wirtschaftlichkeit von Heizanlagen gewidmet.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Materialprüfung mit Röntgenstrahlen

unter besonderer Berücksichtigung der Röntgenmetallkunde

Von

Dr. phil. Dr. med. h. c. **Richard Glocker**

Professor für Röntgentechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart

Vierte erweiterte Auflage. Mit 455 Abbildungen. VII, 530 Seiten Gr.-8°. 1958. Ganzleinen DM 61,50

Inhaltsübersicht: **Einteilung:** Die Natur der Röntgenstrahlen und die verschiedenen Verfahren der Werkstoffprüfung mittels Röntgenstrahlen. — **Erzeugung der Röntgenstrahlen:** Allgemeines über Röntgenröhren. Ausführungsformen von Röntgenröhren und Glühventilröhren. Röntgenapparate. Strahlenschutz. — **Eigenschaften der Röntgenstrahlen:** Absorption und Sekundärstrahlung. Beugung und Brechung. Ionisation und photographische Wirkung. — **Grobstrukturuntersuchung:** Allgemeine Grundlagen der Grobstrukturuntersuchung. Praktische Anwendung der Grobstrukturuntersuchung. — **Spektralanalyse:** Röntgenspektroskopische Apparate. Gesetzmäßigkeiten des Röntgenspektrums. Qualitative Röntgenspektralanalyse. Quantitative Röntgenspektralanalyse. — **Feinstrukturuntersuchung:** Überblick über die verschiedenen Verfahren der Feinstrukturuntersuchung und ihre Anwendungsgebiete. Kristallographische Grundlagen. I. Kristallographische Grundlagen. II. DEBYE-SCHERRER-Aufnahmen (Pulverdiagramme). Diffraktometer (Zählrohrgoniometer). LAUE-Aufnahmen und Drehkristallverfahren. Photographische Röntgengoniometerverfahren. Intensitätsgesetze der Röntgeninterferenzen. Überblick über den Gang einer Strukturbestimmung. Beschreibung von Kristallstrukturen anorganischer und organischer chemischer Stoffe und Grundzüge der Kristallchemie. Struktur von Legierungen. Verbreiterung der Röntgeninterferenzen und Bestimmung der Kristallgröße. Messung von elastischen Spannungen. Kristalltexturen. Nichtkristalline Stoffe und Flüssigkeiten. Kleinwinkelstreuung. — **Mathematischer Anhang.** — **Schrifttum** — **Namenverzeichnis** — **Sachverzeichnis.**

Die Anwendung der Röntgenverfahren erfordert gewisse Vorkenntnisse. In zwei einleitenden Abschnitten werden die Röntgenanlagen und die Eigenschaften der Röntgenstrahlen einschließlich des Strahlenschutzes besprochen. Bei der Grobstrukturuntersuchung zum Nachweis von Fehlstellen z. B. bei Schweißungen gewinnt die Anwendung der Strahlungen von radioaktiven Isotopen steigende Bedeutung. Die Röntgenspektralanalyse ist seit der Einführung des Zählrohres eine Routinemethode der Industrie z. B. zur laufenden Bestimmung des Molybdängehaltes von Stahlproben. Bei der Feinstrukturuntersuchung ist die Metallkunde besonders berücksichtigt; technisch wichtige Vorgänge, wie z. B. die Aushärtung von Legierungen, verdanken ihre endgültige Aufklärung der Röntgenstrukturuntersuchung. Die röntgenographische Messung von Spannungen ermöglicht nicht nur die Ermittlung der Eigenspannungen, die als Folge von Bearbeitungsvorgängen oder Wärmebehandlungen in einem Werkstück entstehen, sondern verspricht auch ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium der Zerrüttung bei Wechselbeanspruchung zu werden. Der Bestimmung der Atomanordnung in amorphen festen Körpern und in Metallschmelzen ist ein besonderer Abschnitt gewidmet.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN/GÖTTINGEN/HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K. B./Z. 040.